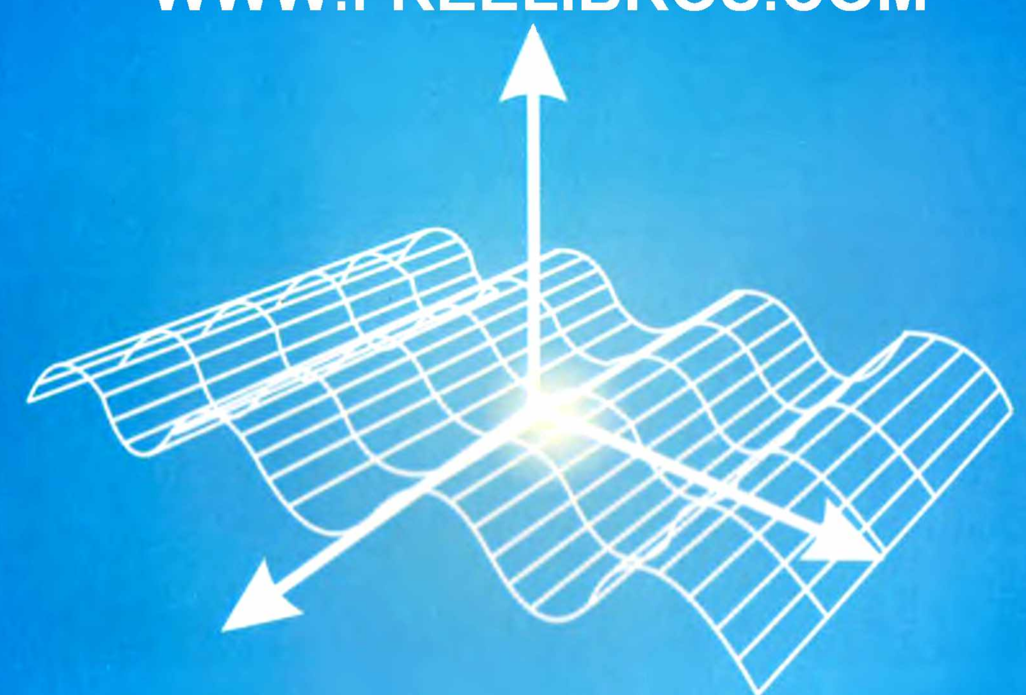
CÁLCULO III

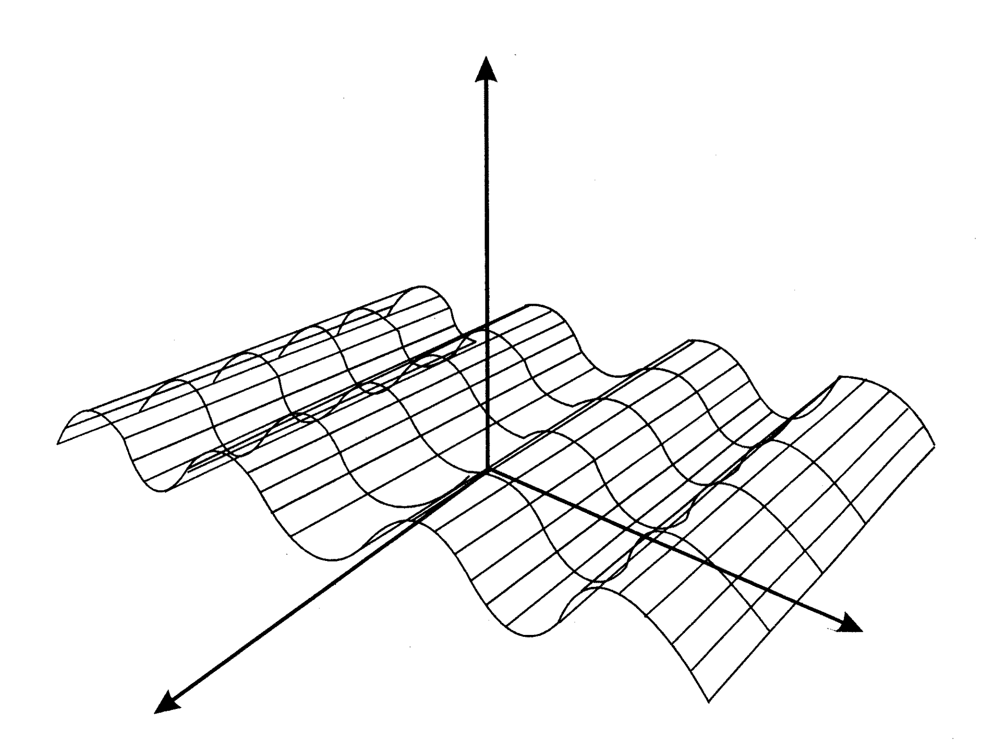
MÁXIMO MITACC MEZA



QUINTA EDICIÓN

CÁLCULO III

MÁXIMO MITACC MEZA



QUINTA EDICIÓN

CÁLCULO III

QUINTA EDICIÓN

Impreso en el Perú Printed in Peru

Impresión, diagramación y composición en los Talleres gráficos de
Editorial THALES S.R.L.

Editorial THALES S.R.L.
Los Tucanes 241 Santa Anita Lima - Perú
Telf. 362-1032
RUC 20251114782

Este libro se terminó de imprimir en
Junio del 2011

PRÓLOGO

Con la experiencia obtenida en las ediciones previas; Cálculo III, sale totalmente aumentado, corregido y con una nueva diagramación.

Cálculo III, ha sido escrito como texto para un curso de tercer semestre, a nivel universitario, cuyo contenido se adecúa a los planes de estudio de las carreras: Matemática, Física, Ingeniería, Química, Economía, etc.

Las principales características de Cálculo III son: la forma clara y sencilla pero rigurosa de exponer la teoría y la gran cantidad de ejemplos prácticos, asi como también un gran número de gráficos, los cuales permiten una mejor comprensión de los temas expuestos.

El objetivo principal de ésta obra es brindar al lector el mejor entendimiento y comprensión profunda de los temas de Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables con valor real.

El estudiante y el profesor que está vinculado con el quehacer de la matemática, encontrará en este libro una gran ayuda para las evaluaciones y en la preparación de clases respectivamente.

Cálculo III, consta de siete capítulos; en el capítulo 1 se estudia a las funciones vectoriales de una variable real. El capítulo 2 está dedicado al estudio de las funciones de varias variables con valor real, poniendo énfasis en el desarrollo de los temas de Límites y continuidad.

En los capítulos 3 y 4 se hace el estudio de las derivadas parciales de funciones de varias variables y sus aplicaciones en la solución de problemas de máximos y mínimos. Se presenta también para ello el método de los "Multiplicadores de Lagrange". El capítulo 5 está dedicado al estudio de la integral doble y la integral triple de una función de dos y tres variables respectivamente, junto con sus aplicaciones, que consiste en el cálculo de áreas, volúmenes y centros de masa. Para facilitar el cálculo de éstas integrales, usamos el Jacobiano de una transformación.

En el capítulo 6 se estudia a las integrales de línea y de superficie, con aplicaciones a la física. También se desarrolla aplicaciones del Teorema de Green en el cual se ve una relación importante entre la integral doble con la integral de línea.

Finalmente el capítulo 7 está dedicado al estudio de sucesiones y series de números reales.

En cada capítulo, se presentan ejemplos completamente desarrollados y ejemplos en los cuales el estudiante deberá efectuar a modo de ejercicio los cálculos de los pasos intermedios. También se propone una gran cantidad de ejercicios, la mayoría de ellos con sus respectivas respuestas, para que el estudiante verifique sus resultados.

En esta quinta edición se ha hecho una revisión meticulosa del texto y correcciones de algunas fallas relacionadas al texto y a las gráficas.

Quiero expresar mi agradecimiento a los lectores por la acogida que brindan a esta presente obra.

Así mismo, expreso mi profundo agradecimiento a todas aquellas personas que directa o indirectamente contribuyeron a la realización de este obra, en especial a mi sobrina Consuelo Meza Lagos, quién dedicó su valioso tiempo para mejorar significativamente la redacción del contenido del texto.

El autor

INDICE

CAPITULO 1: FUNCIONES VECTORIALES

CAPITULO 2: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES LÍMITES Y CONTINUIDAD

CAPITULO 3: DERIVADAS PARCIALES

CAPITULO 4: APLICACIONES DE DERIVADAS PARCIALES

CAPITULO 5: INTEGRALES MÚLTIPLES Y APLICACIONES

CAPITULO 6: INTEGRAL DE LÍNEA Y DE SUPERFICIE

CAPITULO 7: SUCESIONES Y SERIES

1 FUNCIONES VECTORIALES

1.1 FUNCIONES VECTORIALES DE UNA VARIABLE REAL

Definición 1. Una función $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ cuya regla de correspondencia es

$$f(t) = (f_1(t);\ f_2(t); \dots; f_n(t)),\ \ t \in I$$

se denomina función vectorial de una variable real t.

Las n funciones reales f_i, $(i = 1,2,\dots,n)$ se llaman funciones componentes de la función vectorial f.

El dominio de la función vectorial f es el conjunto

$$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \dots D_{f_n}$$

donde D_{f_i} es el dominio de la función componente f_i, $(i = 1,2,\dots,n)$

Ejemplo 1. Halle el dominio de las siguientes funciones vectoriales:

a) $f(t) = (t^2;\ \ln(t-2);\ \sqrt{4-t})$ b) $g(t) = \left(\dfrac{1}{t+2};\ \dfrac{e^t}{\sqrt{9-t^2}};\ \ln(1-t)\right)$

Solución

a) Si $f_1(t) = t^2, f_2(t) = \ln(t-2)$ y $f_3(t) = \sqrt{4-t}$, entonces

$D_{f_1} = \mathbb{R}$, $D_{f_2} = \langle 2; +\infty\rangle$ y $D_{f_3} = \langle -\infty; 4\rangle$

Luego,

$D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = \langle 2: 4\rangle$

b) Si $g_1(t) = \dfrac{1}{t+2}, g_2(t) = \dfrac{e^t}{\sqrt{9-t^2}}$ y $g_3(t) = \ln(1-t)$, entonces

$D_{g_1} = \mathbb{R} - \{-2\}$, $D_{g_2} = \langle -3; 3\rangle$ y $D_{g_3} = \langle -\infty; 1\rangle$

Luego,

$$D_g = D_{g_1} \cap D_{g_2} \cap D_{g_3} = \langle -3: -2\rangle \cup \langle -2; 1\rangle$$

Observación 1. *Sea* $f(t) = (f_1(t);\ f_2(t); \dots ; f_n(t))$ *la regla de correspondencia de la función vectorial f. Si esta regla de correspondencia la escribimos en la forma*

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x_1 = f_1(t) \\ x_2 = f_2(t) \\ \quad \vdots \\ x_n = f_n(t) \end{cases} ,t \in I$$

Se dice que la curva $\mathcal{C}$ es una curva parametrizada en el espacio $\mathbb{R}^n$, y las ecuaciones se llaman ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}$.

Si en las ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}$ se elimina el parámetro t, de tal manera que aparezcan ecuaciones en términos de $x_1, x_2, \dots, x_n$, estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones cartesianas de la curva $\mathcal{C}$.

Observación 2. *En algunas situaciones, las funciones vectoriales se utilizan para determinar el movimiento de una partícula a lo largo de una curva* $\mathcal{C}$, cuya *posición en el tiempo t es* $(f_1(t);\ f_2(t); \dots ; f_n(t))$. *Así, si* $f: I \to \mathbb{R}^n$ *es una función vectorial tal que* $f(t) = (f_1(t);\ f_2(t); \dots ; f_n(t))$, *entonces* $f(t)$ *es el vector de posición del punto* $P(f_1(t);\ f_2(t); \dots ; f_n(t))$ *en la curva* $\mathcal{C}$. *En la figura 1.1 se observa que cuando t toma valores de menor a mayor en el intervalo I, el extremo del vector de posición* $f(t)$ *traza la trayectoria de la curva* $\mathcal{C}$ *indicando su orientación.*

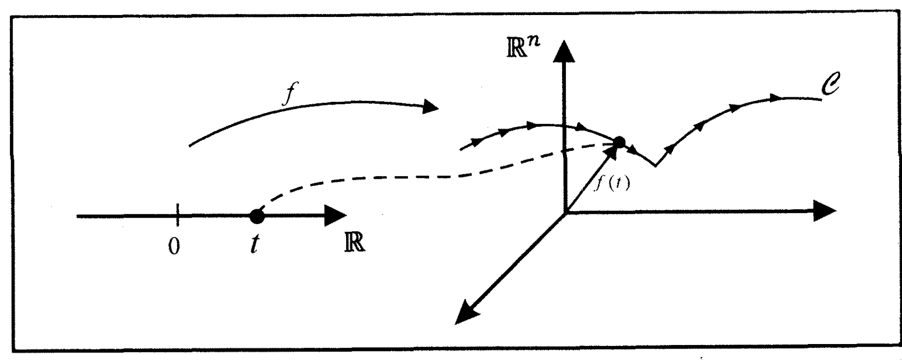


Fig. 1.1

Ejemplo 2. Trace la imagen de las siguientes funciones

a) $f(t) = (1 + t^3; t^2)$ b) $h(t) = (t; t; t^2)$

c) $g(t) = (4\cos t\,; 5\,sen\ t)$ d) $r(t) = (\cos t\,; sen\ t; t),\ t \geq 0$

Solución

a) Las ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}_1$ descrita por la función vectorial f es

$$\mathcal{C}_1: \begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Al eliminar el parámetro t en las ecuaciones paramétricas, se obtiene

$$y = (x - 1)^{2/3}$$

La gráfica de esta ecuación cartesiana se muestra en la figura 1.2

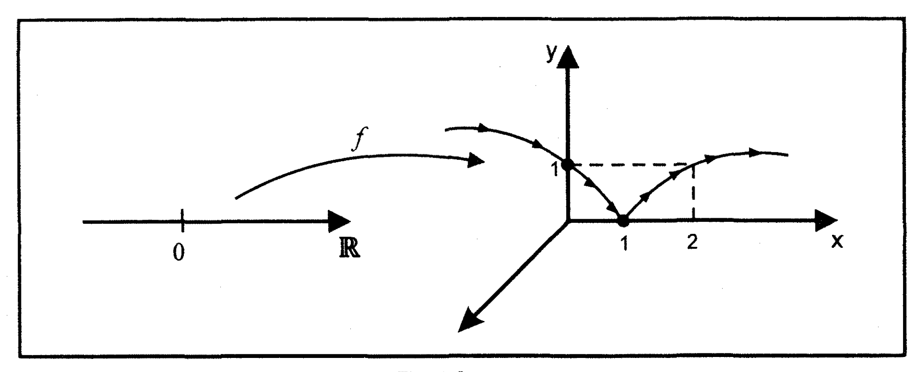


Fig 1 2

b) Las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por la función vectorial g es

$$\mathcal{C}_2: \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 5\,sen\ t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Para eliminar el parámetro t en las ecuaciones paramétricas se despeja $cos\ t$ y $sen\ t$, esto es

$$\cos t = \frac{x}{4} \text{ y } sen\ t = \frac{y}{5}$$

Luego, al utilizar la identidad $cos^2 t + sen^2 t = 1$ resulta la ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

La gráfica de esta ecuación cartesiana se muestra en la figura 1.3

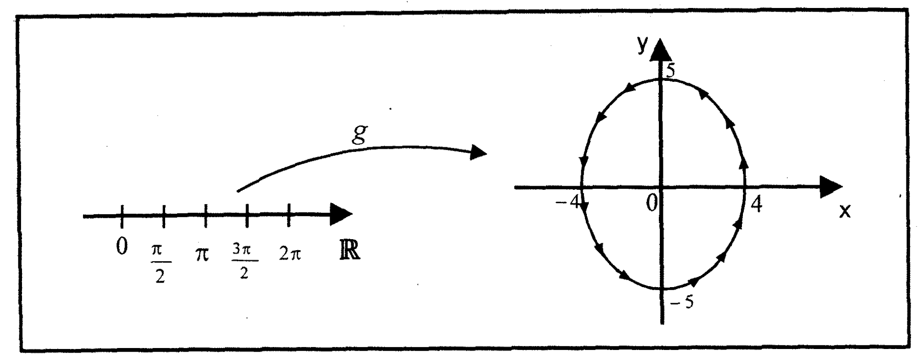


Fig. 1.3

c) Las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por la función vectorial g es

$$\mathcal{C}_3: \begin{cases} x = t \\ y = t \ , t \in \mathbb{R} \\ z = t^2 \end{cases}$$

Al eliminar el parámetro t en las ecuaciones paramétricas, se obtiene que los puntos de la curva están situados en la intersección de las supefficies

$y = x$ y $z = x^2$

La gráfica de la curva se muestra en la figura 1.4

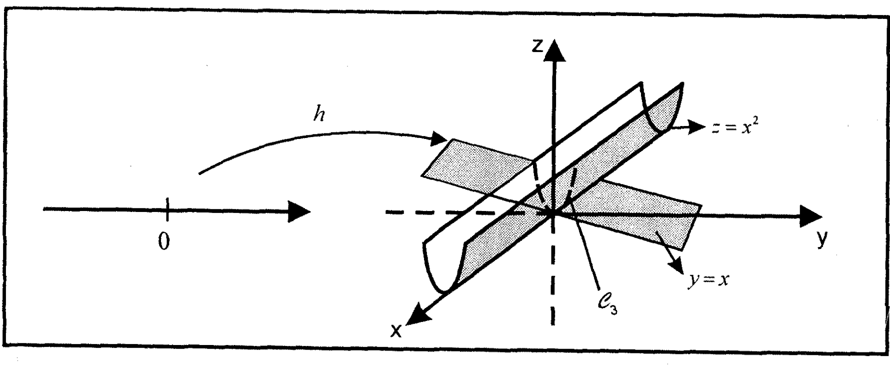


Fig. 1.4

d) Las ecuaciones paramétricas de la curva descrita por la función vectorial r es

$$\mathcal{C}_4: \begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\, t \ , t \in [0; +\infty) \\ z = t \end{cases}$$

Al eliminar el parámetro t en las dos primeras ecuaciones, se obtiene la ecuación cartesiana

$x^2 + y^2 = 1$

Esta ecuación indica que la curva se encuentra en un cilindro circular recto de radio 1, con eje de simetría el eje z. Con la tercera ecuación $z = t$ se localiza los puntos de la curva sobre el cilindro circular recto.

La imagen de la función vectorial r se denomina hélice circular recto. (Fig. 1.5)

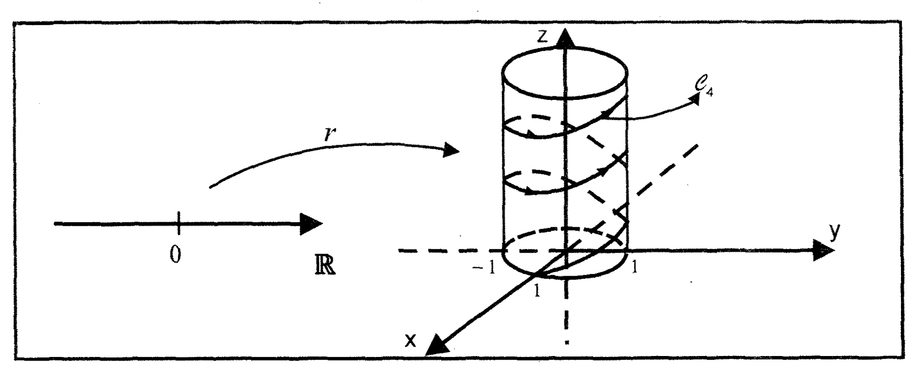


Fig. 1.5

OPERACIONES CON FUNCIONES VECTORIALES

Definición 2. Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funciones vectoriales cuyos dominios son D_f y D_g respectivamente, y sea $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real con dominio D_φ. Las reglas de correspondencia de las funciones $f + g, f - g, \varphi f$ y $f \cdot g$ son

a) $(f + g)(t) = f(t) + g(t),\ t \in (D_f \cap D_g) = D_{f+g}$

b) $(f - g)(t) = f(t) - g(t),\ t \in (D_f \cap D_g) = D_{f-g}$

c) $(\varphi f)(t) = \varphi(t)f(t) = \varphi(t)(f_1(t); \ldots ; f_n(t)),\ t \in D_{\varphi f} = D_\varphi \cap D_f$

d) $(f \bullet g)(t) = f(t) \bullet g(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)g_i(t),\ t \in D_{f\bullet g} = D_f \cap D_g$

e) Si $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ son funciones vectoriales con imagen en el espacio $\mathbb{R}^3$, entonces la regla de correspondencia de la función producto vectorial $f \times g$ es dada por

$$(f \times g)(t) = f(t) \times g(t),\quad t \in D_{f\times g} = D_f \cap D_g$$

Ejemplo 3. Dadas las funciones vectoriales

$$f(t) = (t; t; t^2) \text{ y } g(t) = (t; t^2; t^3)$$

Halle a) $(f + g)(-1)$ b) $(f \bullet g)(1)$ c) $(f \times g)(2)$

Solución

a) Se tiene, $f(-1) = (-1;-1;1)$ y $g(-1) = (-1;1;-1)$. Luego,

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-1;-1;1) + (-1;1;-1) = (-2;0;0)$$

b) Como $f(1) = (1;1;1)$ y $g(1) = (1;1;1)$, entonces

$$(f \bullet g)(1) = f(1) \bullet g(1) = (1;1;1) \bullet (1;1;1) = 3$$

c) Dado que $f(2) = (2;2;4)$ y $g(2) = (2;4;8)$, entonces

$$(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = (0;-8;4)$$

Ejemplo 4. Halle una función vectorial que represente a las siguientes curvas

a) $9x^2 + 4y^2 = 36$ b) $y = x^2 - 4x + 7$

Solución

a) La curva es una elipse con ecuación canónica

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Hay muchas maneras de parametrizar esta curva, una de ellas es elegir

$$\frac{x}{2} = \cos t \ \text{ y } \ \frac{y}{3} = sen\ t \ \Leftrightarrow x = 2\cos t \ \text{ y } \ y = 3\ sen\ t$$

Luego, la función vectorial que representa a la curva es

$$f(t) = (2\cos t\ ; 3\ sen\ t), \quad t \in \mathbb{R}$$

b) Una parametrización natural de esta curva es elegir $x = t$. De donde,

$$y = t^2 - 4t + 7$$

Por tanto, la función vectorial que representa a la curva es

$$g(t) = (t; t^2 - 4t + 7), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5. Halle una función vectorial que represente a la curva de intersección de las siguientes superficies.

a) $x^2 + y^2 = 16$ y $z = xy$ b) $z = 16x^2 + 9y^2$ y $y = x^2$

Solución

a) Una manera natural de parametrizar la curva de intersección de las superficies es elegir

$x = 4\cos t$ y $y = 4\ sen\ t$. Entonces $z = 16\cos t\ sen\ t$

Luego, la función vectorial que representa a la curva de intersección de las superficies es

$$f(t) = (4\cos t\ ; 4\ sen\ t; 16\cos t\ sen\ t), \quad t \in \mathbb{R}$$

b) En este caso, para parametrizar la curva de intersección se elige
$x = t$, de donde $y = t^2$ y $z = 16t^2 + 9t^4$
Por consiguiente, la función vectorial que representa a la curva de intersección de las superficies es
$$g(t) = (t; t^2; 16t^2 + 9t^4),\ \ t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIOS

1.- Trace la gráfica de la imagen de las siguientes funciones

a) $f(t) = (\cos t\, ; sen\ t)$

b) $f(t) = (3\cosh t\, ; 5\ senh\ t)$

c) $f(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$

d) $f(t) = (5\ sen\ t; 4\cos t)$

e) $f(t) = (3 + t^5; t^2 + 1)$

f) $f(t) = (t^2 + 3; 1 + t^3)$

g) $f(t) = (t; t; sen\ t), t \in [0; 4\pi]$

h) $f(t) = \left(t; \dfrac{t^2}{4}; \dfrac{t^3}{9}\right)$

i) $f(t) = (a\cos t\, ; a\ sen\ t; bt), a > 0$

j) $f(t) = \left(\dfrac{3t}{1+t^3}; \dfrac{3t^2}{1+t^3}\right)$

k) $f(t) = (3\ sen\ t; 5\cos t\, ; 7),\ t \in [0; 2\pi]$

2.- Determinar el punto de intersección de la recta
$f(t) = (9 + 3t; -10 - 4t; 7 + 2t)$ con el plano YZ.

3.- Encuentre una representación paramétrica de las siguientes curvas

a) $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$ R. $\alpha(t) = (3\cos t\, ; 3\ sen\ t; 0)$

b) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0,\ z = 0$

c) $y = 3x^2,\ z = 0$

d) $(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 4,\ z = 0$ R. $\alpha(t) = (1 + 2\cos t\, ; 2 + sen\ t; 0)$

4.- Sean $f(t) = (t^2 + 1; 0; t^3)$ y $g(t) = (sen\ t; -\cos t\, ; 0)$. Halle

a) $f(a + b)$ b) $g(t - 3)$ c) $f(sen\ t) \times g(t^2 + 1)$

5.- Defina una función vectorial del intervalo $[a; b]$ sobre el segmento de recta de extremos P_0 y P_1 de $\mathbb{R}^n$.

6.- Defina una función del intervalo $[-2; 2]$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen sea el triángulo de vértices $(3; 2; -1), (2; 0; 1)$ y $(1; -2; 1)$

7.- Sean $f(t) = \left(2t^{-1}; \sqrt{4-t^2}\right)$, $g(t) = \left(\ln(t+1); \sqrt{t^2+2t-8}\right)$

Calcule $f \pm g,\ f \bullet g,\ f \times g,\ 4f - 2g$, y sus dominios de definición.

1.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 3. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial dada por

$$f(t) = (f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t)),\quad t \in \mathbb{R}$$

y sea t_0 un número real cualquiera. Entonces

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t); \dots; \lim_{t \to t_0} f_n(t)\right)$$

siempre que existan $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t)$, $i = 1,2,\dots,n$

Ejemplo 6. Calcule $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)$ (en caso exista) de las siguientes funciones vectoriales

a) $f(t) = \left(\dfrac{1-\sqrt{t+1}}{t+2}; \dfrac{t}{t+1}; 2\right),\ t_0 = 0$

b) $f(t) = \left(\dfrac{e^t - e}{t-1}; \dfrac{\ln t}{1-t}; \dfrac{sen\,(t-1)}{t-1}\right),\ t_0 = 1$

c) $f(t) = \left(\dfrac{1-\cos(sen\,t)}{sen^2 t}; \dfrac{\cos t - \cos(sen\,t)}{t^2}; \dfrac{1}{t+\pi}\right),\ t_0 = 0$

d) $f(t) = \left((2-t)^{\tan(\frac{\pi}{2}t)}; \dfrac{sen\,(\sqrt[5]{t}-1)}{\tan(\sqrt[5]{t}-1)}; \dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}\right),\ t_0 = 1$

Solución

a) $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \left(\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-\sqrt{t+1}}{t+2}; \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{t+1}; \lim\limits_{t \to 0} 2\right) = (0; 0; 2)$

b) $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \left(\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{e^t - e}{t-1}; \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{\ln t}{1-t}; \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{sen\,(t-1)}{t-1}\right) = (e; -1; 1)$

c) $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \left(\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1-\cos(sen\,t)}{sen^2 t}; \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cos t - \cos(sen\,t)}{t^2}; \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t+\pi}\right)$

$$= \left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{\pi}\right)$$

d) $\lim_{t\to 1} f(t) = \left(\lim_{t\to 1}(2-t)^{\tan(\frac{\pi}{2}t)}; \lim_{t\to 1}\frac{sen\,(\sqrt[5]{t-1})}{\tan(\sqrt[5]{t-1})}; \lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}\right) = \left(e^{2/\pi}; 1; \frac{1}{2}\right)$

PROPIEDADES OPERACIONALES DE LÍMITE DE FUNCIONES VECTORIALES

Sean $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funciones vectoriales de una variable real tales que

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \vec{b} = (b_1; \dots; b_n) \text{ y } \lim_{t\to t_0} g(t) = \vec{a} = (a_1; \dots; a_n)$$

y sea $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real tal que $\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = \alpha$, entonces

i) $\lim_{t\to t_0}[f(t) + g(t)] = \lim_{t\to t_0} f(t) + \lim_{t\to t_0} g(t) = \vec{b} + \vec{a}$

ii) $\lim_{t\to t_0}[f(t) - g(t)] = \lim_{t\to t_0} f(t) - \lim_{t\to t_0} g(t) = \vec{b} - \vec{a}$

iii) $\lim_{t\to t_0}[\varphi(t)g(t)] = \left(\lim_{t\to t_0} \varphi(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right) = \alpha\vec{b}$

iv) $\lim_{t\to t_0}[f(t) \bullet g(t)] = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right) \bullet \left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right) = \vec{b} \bullet \vec{a}$

v) $\lim_{t\to t_0}[f(t) \times g(t)] = \left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right) \times \left(\lim_{t\to t_0} g(t)\right) = \vec{b} \times \vec{a}$ (*solo en* $\mathbb{R}^3$)

Ejemplo 7. Sean $f(t) = \left(\frac{sen\,t}{t}; \cos t; \frac{1}{t+\pi}\right)$ y

$$g(t) = \left(\frac{1+\cos t}{sen\,t}; \frac{1}{\cos t}; sen\,t + t\right)$$

funciones vectoriales con imagen en el espacio $\mathbb{R}^3$. Halle:

a) $\lim_{t\to\pi}[f(t) \bullet g(t)]$ b) $\lim_{t\to\pi}[f(t) \times g(t)]$

Solución

a) $\lim_{t\to\pi} f(t) = \left(\lim_{t\to\pi}\frac{sen\,t}{t}; \lim_{t\to\pi}\cos t; \lim_{t\to\pi}\frac{1}{t+\pi}\right) = \left(0; -1; \frac{1}{2\pi}\right)$

$\lim_{t\to\pi} g(t) = \left(\lim_{t\to\pi}\frac{1+\cos t}{sen\,t}; \lim_{t\to\pi}\frac{1}{\cos t}; \lim_{t\to\pi}(sen\,t + t)\right) = (0; -1; \pi)$

Luego,

$\lim_{t\to\pi}[f(t) \bullet g(t)] = \left(\lim_{t\to\pi} f(t)\right) \bullet \left(\lim_{t\to\pi} g(t)\right) = \left(0; -1; \frac{1}{2\pi}\right) \bullet (0; -1; \pi) = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{t\to\pi}[f(t)\times g(t)] = \left(\lim_{t\to\pi} f(t)\right)\times\left(\lim_{t\to\pi} g(t)\right) = \left(0;-1;\frac{1}{2\pi}\right)\times(0;-1;\pi)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\pi \\ 0 & -1 & \pi \end{vmatrix} = \left(\frac{1-2\pi^2}{2\pi};0;0\right)$$

EJERCICIOS

1.- Calcule $\lim_{t\to t_0} f(t)$ (en caso exista) de las siguientes funciones vectoriales

a) $f(t) = (\sqrt{t};\ t^2;\ sen\ t),\ t_0 = 2$

b) $f(t) = \left(\ln t;\ \sqrt{5+t^2};\ \frac{3t}{4+t^2}\right),\ \ t_0 = 2$

c) $f(t) = \left(\frac{t}{4+t^2};\ \frac{3+5t}{t^2};5t^2\right),\ \ t_0 = 3$

d) $f(t) = \left(\frac{sen\ 7t}{t};\ \frac{sen\ 5t}{sen\ 3t};\ \frac{\tan 3t}{sen\ 2t}\right),\ \ t_0 = 0$

e) $f(t) = \left(e^t;\frac{t^2-1}{t-1};t^2+1\right),\ \ t_0 = 1$

f) $f(t) = \left(\frac{t^t-1}{t\ \ln t};\ \frac{sen\ (t-1)}{t^2-1};\ \frac{1-t^2}{sen\ \pi t}\right),\ \ t_0 = 1$

g) $f(t) = \left(\frac{t-\tan t}{t-sen\ t};\ \frac{1}{t}-\frac{1}{e^t-1};\ \frac{1}{t\cos t}-\cot(t)\right),\ \ t_0 = 0$

2.- Si $f(t) = \left(t+\left[\!\left[\frac{t}{3}\right]\!\right];\ t+4;\ 7\right)$, determine $\lim_{t\to 6^-} f(t)$ y $\lim_{t\to 6^+} f(t)$

3.- Si $f(t) = \left(\frac{t+1}{5+[\![2t]\!]};\ 5-[\![4t]\!];\ \frac{\sqrt{2t}-4+\sqrt{8-t}}{\sqrt{64\ sen\ (t-6)-t^2}}\right)$.Halle $\lim_{t\to 8^-} f(t)$

1.3 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 4. Una función vectorial $f: I\to\mathbb{R}^n$ es continua en el punto $t_0\in I$, si y solo si, las funciones coordenadas $f_i: I\to\mathbb{R}$ son continuas en t_0, $i=1,2,\dots,n$

Ejemplo 8. Dada la función vectorial $f(t)=\left(\frac{t^2-1}{t+1};\ \frac{sen\,(\pi t)}{\cos(\pi t)};\ \frac{\ln t+1}{t+2}\right)$

Determine si la función vectorial es continua en $t=1$.

Solución

Las funciones coordenadas

$$f_1(t)=\frac{t^2-1}{t+1};\ f_2(t)=\frac{sen\,(\pi t)}{\cos(\pi t)}\ \text{ y }\ f_3(t)=\frac{\ln t+1}{t+2}$$

son continuas en $t=1$, pues

$$\lim_{t\to 1} f_1(t)=0=f_1(1), \lim_{t\to 1} f_2(t)=0=f_2(1)\ \text{ y }\ \lim_{t\to 1} f_3(t)=\frac{1}{3}=f_3(1)$$

Luego, la función vectorial f es continua en $t=1$.

PROPIEDADES

Sean $f,g\colon I\to\mathbb{R}^n$ funciones vectoriales continuas en el punto $t_0\in I$. Entonces

i) λf es continua en t_0, siendo λ una constante real.
ii) $f\pm g$ es continua en t_0
iii) $f\bullet g$ es continua en t_0
iv) $f\times g$ es continua en t_0 (solamente para funciones con imagen en $\mathbb{R}^3$)

Observación 3. *Una función vectorial* $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ *es continua en el intervalo* $I\subset\mathbb{R}$, *si es continua en cada uno de los puntos de* I.

Ejemplo 9. Determine si las siguientes funciones vectoriales son continuas en el punto t_0 indicado.

a) $f(t)=\left(\frac{sen\,t}{t};\ \frac{\ln(1+t)}{1-t};\ \frac{\cos t-1}{t}\right),\ t_0=0$

b) $g(t)=(1-t;\ \ln(2t-1);\ t^3+1),\ t_0=0$

Solución

a) La función coordenada $f_1(t)=\frac{sen\,t}{t}$ no es continua en t_0, pues $f_1(0)$ no está definida. Luego, la función vectorial $f(t)$ no es continua en $t_0=0$.

b) La función vectorial $g(t)=(1-t;\ \ln(2t-1);\ t^3+1)$ es continua en $t_0=1$, pues las funciones coordenadas $g_1(t)=1-t, g_2(t)=\ln(2t-1)$ y $g_3(t)=t^3+1$ son continuas en $t_0=1$.

EJERCICIOS

1.- Analizar la continuidad de las siguientes funciones vectoriales en los intervalos que se indican

a) $f(t) = \left(\sqrt{4-t^2};\ \ln(3-t)\ ;\ e^{t-3}\right),\ \ t \in [-2;3\rangle$

b) $f(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{2\ arcsen\ t}{3t};t\ sen\left(\dfrac{\pi}{t}\right);\ \dfrac{\cos(2\pi t)}{t}\right), & si\ t \in \langle 0;1\rangle \\ \left(\dfrac{\pi}{3};t-1;\ \ln(t)+1\right) & , si\ t \in [1;2] \end{cases}$

c) $f(t) = \begin{cases} \left(sen\ t;\dfrac{t}{1-t};\ 2t\right), & si\ t \in [0;1\rangle \\ (-1;0;3) & , si\ t \in [1;2] \end{cases}$

2.- Determine la continuidad de las funciones vectoriales en el punto indicado

a) $f(t) = \left\{\left(\dfrac{t^2-4}{|t-3|-1};\ \dfrac{e^{t-2}-1}{t}\right), en\ t_0 = 2\right.$

b) $f(t) = \begin{cases} \left(4t^4+5;\dfrac{arcsen\ t}{t};\ sen\ t\ sen\ \dfrac{1}{t}\right), & si\ t \neq 0 \\ (5;0;0) & , si\ t = 0 \end{cases}$

3.- Encuentre los puntos (si es que existen) donde las siguientes funciones no son continuas

a) $f(t) = (e^t;t;senh\ t),\ D_f = [0;4]$

b) $f(t) = \begin{cases} \left(t;\ \dfrac{sen\ t}{t}\right), & si\ t \in \langle 0;\pi]\\ (0;1), & si\ t = 0 \end{cases}$

c) $f(t) = (t;t;\ [\![2t]\!]),\ t \in [0;8]$

d) $f(t) = \begin{cases} (-t;\ -2t;t) & , si\ t \in [-2;0] \\ \left(t^{1/3}(t-2)^{2/3};\ \dfrac{t}{1+t^2};\ t^2\right), & si\ t \in \langle 0;2] \end{cases}$

e) $f(t) = \begin{cases} \left((t+3)^{1/3}(t-2)^{2/3};\ \dfrac{t+3}{t^2+2};2t+6\right) & , si\ t \in \langle -\infty;-3] \\ \left(\dfrac{t^2+2t-3}{t^2+1};(t-1)\ln(t+4);\ \sqrt[5]{(t-1)(t+3)^4}\right) & , si\ t \in \langle -3;1] \\ (3t-3;\ e^t-e;sen\ (\pi t)) & , si\ t \in \langle 1;+\infty\rangle \end{cases}$

4.- Demuestre que si $f: I \to \mathbb{R}^n$ es una función continua en I entonces $\|f\|$ es continua en I.

1.4 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Definición 5. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial con dominio D_f.
La derivada de la función vectorial f en cualquier punto $t \in D_f$ es la función vectorial $f'(t)$ dada por

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

si el límite existe.

Si $f'(t_0)$ existe para $t_0 \in D_f$, se dice que f es derivable o diferenciable en t_0.

En general, si $f'(t)$ existe para todo $t \in I \subset D_f$, entonces se dice que f es derivable en el intervalo $I \subset D_f$.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Sea $f: I \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial derivable en el punto $t_0 \in I$.

Geométricamente, $f'(t_0) = \dfrac{df(t_0)}{dt}$ es un vector tangente a la curva trayectoria de $f(t)$ en el punto $f(t_0)$ (Fig. 1.6)

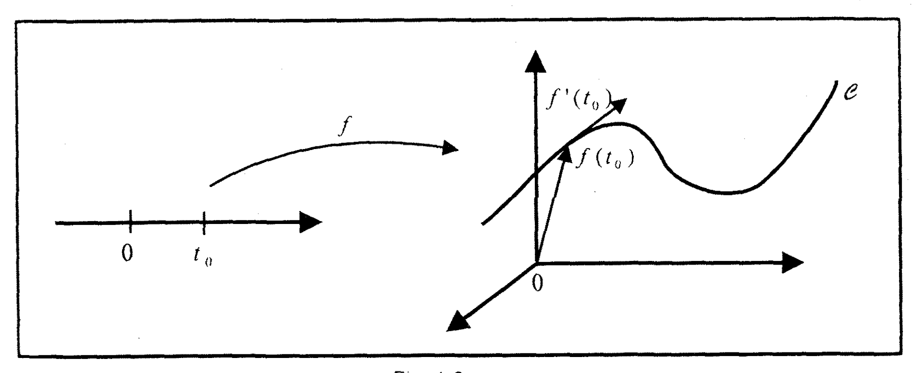


Fig. 1.6

Definición 6. Sea $f: I \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial derivable en el punto $t_0 \in I$. La ecuación vectorial de la recta tangente a la curva trayectoria de f que pasa por el punto $f(t_0)$ y es paralela al vector $f'(t_0)$ es

$$L_T: (x; y; z) = f(t_0) + tf'(t_0), t \in \mathbb{R}$$

El siguiente resultado nos proporciona un procedimiento conveniente para calcular la derivada de una función vectorial, en términos de las derivadas de las funciones componentes.

Teorema1. Si $f(t) = (f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t))$ es una función vectorial con imagen en el espacio $\mathbb{R}^n$, donde $f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t)$ son funciones reales derivables, entonces

$$f'(t) = (f_1'(t); f_2'(t); \dots; f_n'(t))$$

Observación 4. Si una partícula se mueve a lo largo de una curva $\mathcal{C}$ en el espacio $\mathbb{R}^n$, de modo que su vector posición en el tiempo t es $f(t) = (f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t))$; entonces, el vector velocidad $v(t)$ y el vector aceleración $a(t)$ de la partícula en el instante t son dadas por

$$v(t) = f'(t) = (f_1'(t); f_2'(t); \dots; f_n'(t))$$

$$a(t) = v'(t) = f''(t) = (f_1''(t); f_2''(t); \dots; f_n''(t))$$

El vector velocidad $v(t)$ tiene la dirección del vector tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $f(t)$ y el vector aceleración $a(t)$ apunta hacia el lado cóncavo de la curva $\mathcal{C}$ (lado hacia donde se doble la curva).(Fig. 1.7)

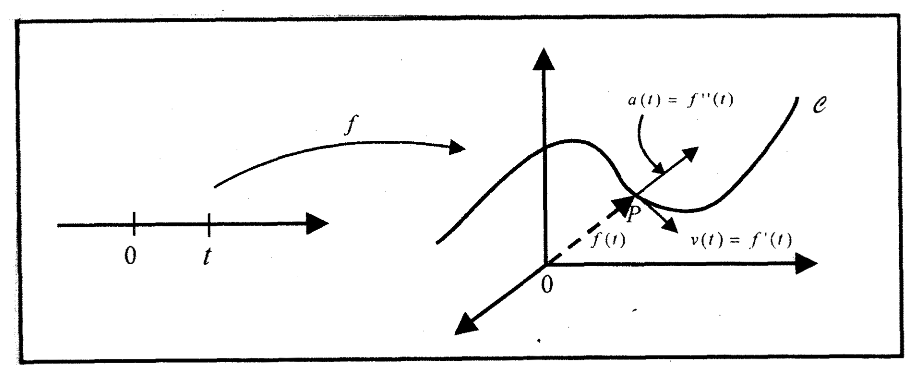


Fig. 1.7

El módulo del vector velocidad $v(t)$, esto es,

$$\|v(t)\| = \|f'(t)\| = \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + \cdots + [f_n'(t)]^2}$$

se denomina rapidez de la partícula en el instante t.

Ejemplo 10. Halle la derivada de las siguientes funciones vectoriales:

a) $f(t) = ((t+1)^3; \arctan(2t^2);\ e^{-3t})$

b) $g(t) = \left(\cos(4t); sen\ (2t);\ e^{t^2}\right)$

Solución

a) $f'(t) = \left(3(t+1)^2; \dfrac{4t}{1+4t^4};\ -3e^{-3t}\right)$

b) $g'(t) = \left(-4\ sen\ (4t); 2\cos(2t); 2te^{t^2}\right)$

Ejemplo 11. Sea $f(t) = \left(t \arccos t - \sqrt{1-t^2};\ \ln(\sqrt{1+t^2}) - t\arctan t;\ e^{-t^2}\right)$ Calcule $f'(0)$ y $f''(0)$.

Solución

i)

$$f'(t) = \left(\arccos t - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}};\ \frac{t}{1+t^2} - \arctan t - \frac{t}{1+t^2};\ -2te^{-t^2}\right)$$

$$= \left(\arccos t;\ -\arctan t;\ -2te^{-t^2}\right)$$

$$f'(0) = \left(\frac{\pi}{2}; 0; 0\right)$$

ii) $f''(t) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}};\ -\dfrac{1}{1+t^2};\ -2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2}\right)$

$$f''(0) = (-1;\ -1;\ -2)$$

Ejemplo 12. La imagen de la función vectorial $f(t) = \left(e^{t-1};\ e^{-2(t-1)}\right)$ describe la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano XY.

a) Trace la gráfica de la trayectoria de la partícula.
b) Dibuje los vectores velocidad y aceleración para $t = 1$.
c) Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva imagen de f en el punto $A(e;\ e^{-2})$.

Solución

a) Las ecuaciones paramétricas de la curva $\mathcal{C}$ descrita por la función vectorial f es

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = e^{t-1} \\ y = e^{-2(t-1)} \end{cases},\quad t \in \mathbb{R}$$

Al eliminar el parámetro t en las ecuaciones paramétricas, se obtiene la ecuación cartesiana

$$\mathscr{C}: y = \frac{1}{x^2}, x > 0$$

La gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 1.8.

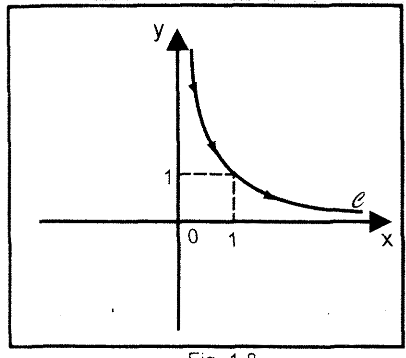


Fig 1 8

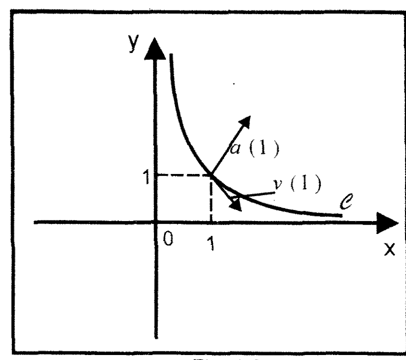


Fig 1 9

b) Los vectores velocidad y aceleración en cualquier instante t son

$$v(t) = f'(t) = \left(e^{t-1};\ -2e^{-2(t-1)}\right)$$

$$a(t) = v'(t) = \left(e^{t-1}; 4e^{-2(t-1)}\right)$$

Para $t = 1$, los vectores velocidad y aceleración son

$$v(1) = (1; -2) \text{ y } a(1) = (1; 4)$$

cuyas gráficas se muestran en la figura 1.9.

c) El vector de posición del punto de tangencia $A(e;\ e^{-2})$ se obtiene cuando $t = 2$, esto es, $f(2) = (e;\ e^{-2})$
Luego, el vector tangente a la curva $\mathscr{C}$ es

$$f'(2) = (e;\ -2e^{-2})$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva en el punto A es

$$L_T: (x; y; z) = (e; e^{-2}) + t(e; -2e^{-2}),\ \ t \in \mathbb{R}$$

REGLAS DE DERIVACIÓN

Sean $f, g: I \to \mathbb{R}^n$ funciones vectoriales derivables de t, c una constante real y $\alpha: I \to \mathbb{R}$ una función real derivable de t. Entonces se tiene:

1.- $\frac{d}{dt}[f(t) \pm g(t)] = f'(t) \pm g'(t)$

2.- $\frac{d}{dt}[c\, f(t)] = cf'(t)$

3.- $\frac{d}{dt}[\alpha(t)f(t)] = \alpha'(t)\, f(t) + \alpha(t)\, f'(t)$

4.- $\frac{d}{dt}[f(t) \bullet g(t)] = f'(t) \bullet g(t) + f(t) \bullet g'(t)$

5.- $\frac{d}{dt}[f(t) \times g(t)] = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$ (válido solo en $\mathbb{R}^3$)

6.- $\frac{d}{dt}[\|f(t)\|] = \frac{f(t) \bullet f'(t)}{\|f(t)\|},\ si\ f(t) \neq \vec{0}$

Observación 5. Si $f: I \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial derivable de t tal que $\|f(t)\| = c, \forall t \in I$ (c constante real), entonces

$$f'(t) \bullet f(t) = 0$$

Esto indica que el vector tangente $f'(t)$ es perpendicular al vector de posición $f(t)$.

Ejemplo 13. Si $f(t) = (t;\ t^2; 3 + t), g(t) = (\cos t\,; sen\, t;\ \ln(t + 1))$ y $\alpha(t) = e^{-4t}$, calcule

a) $(\alpha\, f)'(0)$ b) $(f + g)'(0)$ c) $(f \bullet g)'(0)$ d) $(f \times g)'(0)$

Solución

Se tiene

$$f'(t) = (1; 2t; 1), g'(t) = \left(-sen\, t; \cos t\,; \frac{1}{t+1}\right), \alpha'(t) = -4e^{-4t}$$

Luego, al evaluar en $t = 0$ se obtiene

$$f'(0) = (1; 0; 1), g'(0) = (0; 1; 1) \text{ y } \alpha'(0) = -4$$

Así, al utilizar las reglas de derivación resulta

a) $(\alpha\, f)'(0) = \alpha'(0)f(0) + \alpha(0)f'(0)$

$$= -4(0; 0; 3) + 1(1; 0; 1) = (1; 0; -11)$$

b) $(f+g)'(0) = f'(0) + g'(0) = (1;0;1) + (0;1;1) = (1;1;2)$

c) $(f \bullet g)'(0) = f'(0) \bullet g(0) + f(0) \bullet g'(0) = 1 + 3 = 4$

d) $(f \times g)'(0) = [f'(0) \times g(0)] + [f(0) \times g'(0)]$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0;1;0) + (-3;0;0) = (-3;1;0)$$

Ejemplo 14. Determine si el vector de posición de la función vectorial $f(t) = (\cos(t^2)\,; sen\,(t^2))$ es perpendicular a su vector tangente en cualquier punto $t \in D_f$.

Solución

Como $\|f(t)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$, entonces el vector tangente $f'(t) = (-2t\, sen\,(t^2); 2t\cos(t^2))$ es perpendicular al vector posición $f(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 15. Dada la función vectorial $f(t) = \left(1-2t; t^2; 2e^{2(t-1)}\right)$. Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva descrita por f en el punto en que el vector $f'(t)$ es paralelo al vector $f(t)$.

Solución

Como los vectores $f(t)$ y $f'(t) = \left(-2; 2t; 4e^{2(t-1)}\right)$ son paralelos, entonces existe un escalar k tal que

$$f'(t) = kf(t) \Leftrightarrow \left(-2; 2t; 4e^{2(t-1)}\right) = k\left(1-2t; t^2; 2e^{2(t-1)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = k(1-2t) \\ 2t = kt^2 \\ 4e^{2(t-1)} = 2ke^{2(t-1)} \end{cases} \Leftrightarrow k = 2 \ y \ t = 1$$

Luego, el punto de tangencia y el vector tangente son respectivamente

$$f(1) = (-1;1;2) \ \text{y} \ f'(1) = (-2;2;4)$$

Por tanto, la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva descrita por f es

$$L_T: (x;y;z) = (-1;1;2) + s(-2;2;4), \ s \in \mathbb{R}$$

Teorema 2. Si $f: I \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial derivable de t y $\varphi: I \to \mathbb{R}$ es una función real derivable en I, entonces $f \circ \varphi$ es derivable en I y

$$\frac{d}{dt}[f(\varphi(t))] = f'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = \varphi'(t)f'\big(\varphi(t)\big), \ t \in I$$

Demostración

Como $f(\varphi(t)) = (f_1(\varphi(t)); f_2(\varphi(t)); \dots; f_n(\varphi(t)))$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f(\varphi(t))] &= (f_1'(\varphi(t))\varphi'(t); f_2'(\varphi(t))\varphi'(t); \dots; f_n'(\varphi(t))\varphi'(t)) \\ &= \varphi'(t)f'(\varphi(t))\end{aligned}$$

Ejemplo 16. Sean las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dadas por las funciones vectoriales

$$\mathcal{C}_1: f(t) = \left(\frac{1-t^2}{2}; 2t+1; 1+e^{2-t}\right) \text{ y } \mathcal{C}_2: g(t) = \left(\frac{2t-1}{2}; 4-t; 3-e^{t+1}\right)$$

a) Halle el punto de intersección de las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

b) Calcule la medida del ángulo que forman las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en su punto de intersección.

Solución

a) Sean t_1 y t_2 dos valores distintos de t para los cuales

$$f(t_1) = g(t_2) \Leftrightarrow \left(\frac{1-t_1^2}{2}; 2t_1+1; 1+e^{2-t_1}\right) = \left(\frac{2t_2-1}{2}; 4-t_2; 3-e^{t_2+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-t_1{}^2}{2} = \dfrac{2t_2-1}{2} \\ 2t_1+1 = 4-t_2 \\ 1+e^{2-t_1} = 3-e^{t_2+1} \end{cases}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtiene $t_1 = 2$ y $t_2 = -1$

Luego, el punto de intersección de las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es

$$f(2) = g(-1) = \left(-\frac{3}{2}; 5; 2\right)$$

b) La derivada de las funciones vectoriales f y g son

$$f'(t) = (-t; 2; -e^{2-t}) \text{ y } g'(t) = (1; -1; -e^{t+1})$$

Los vectores tangentes a las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en su punto de intersección son

$$f'(2) = (-2; 2; -1) \text{ y } g'(-1) = (1; -1; -1)$$

Como el ángulo que forman las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ en su punto de intersección es igual al ángulo formado por los vectores tangentes $f'(2)$ y $g'(-1)$, se tiene

$$\cos\theta = \frac{f'(2) \bullet g'(-1)}{\|f'(2)\|\|g'(-1)\|} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Ejemplo 17. Una partícula se mueve hacia la derecha sobre la curva $y = \sqrt{x^2+4}$ partiendo del punto $(0; 2)$ en el instante $t = 2$. Si la distancia de cualquier punto de la curva al origen de coordenadas es proporcional a t, halle el vector velocidad de la partícula en el instante $t = 6$.

Solución

Sea $P(x;y)$ un punto cualquiera de la curva $\mathcal{C}$ (Fig. 1.10). Entonces,

$$d(P;0) = \sqrt{x^2 + y^2} = kt \quad (*)$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Como en $t = 2$ la partícula está en el punto $(0; 2)$, entonces se tiene

$$\sqrt{0+4} = 2k \Longrightarrow k = 1$$

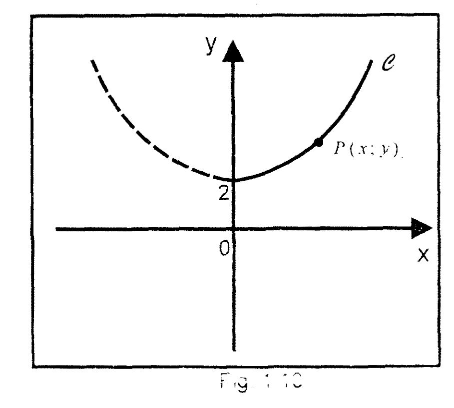


Fig. 1.10

Así, al reemplazar $k = 1$ en (*) resulta

$$\sqrt{x^2 + y^2} = t \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = t^2 \quad (**)$$

Dado que $y = \sqrt{x^2 + 4}$, entonces $y^2 = x^2 + 4$. Al sustituir esta expresión en (**), se tiene

$$2x^2 + 4 = t^2 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{t^2 - 4}{2}} \quad (x > 0)$$

Luego, la función vectorial que describe el movimiento de la partícula es

$$f(t) = \left(\sqrt{\frac{t^2 - 4}{2}}; \sqrt{\frac{t^2 + 4}{2}}\right), \quad t \geq 2$$

La derivada de f es

$$f'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2t^2 - 8}}; \frac{t}{\sqrt{2t^2 + 8}}\right)$$

Por tanto, el vector velocidad de la partícula en el instante $t = 6$ es

$$v(6) = f'(6) = \left(\frac{6}{8}; \frac{6}{4\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$$

Ejemplo 18. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ descrita por la función vectorial

$$f(t) = \left(3\, sen\left(\frac{t}{3}\right); 3\cos\left(\frac{t}{3}\right); \sqrt{8}t\right)$$

a) Halle el vector velocidad y la rapidez de la partícula en cualquier instante t.

b) Determine el vector aceleración y su módulo.

c) Calcule el ángulo θ que forman los vectores velocidad y aceleración.

Solución

a) El vector velocidad y la rapidez de la partícula en cualquier instante t son

$$v(t) = f'(t) = \left(\cos\left(\frac{t}{3}\right); -sen\left(\frac{t}{3}\right); \sqrt{8}\right)$$

Rapidez: $\|v(t)\| = \|f'(t)\| = \sqrt{1+8} = 3$

b) El vector aceleración y su módulo son

$$a(t) = f''(t) = \left(-\frac{1}{3}sen\left(\frac{t}{3}\right); -\frac{1}{3}\cos\left(\frac{t}{3}\right); 0\right) \text{ y } \|a(t)\| = \frac{1}{3}$$

c) Como $\|v(t)\| = 3$, entonces por la observación 5 resulta que los vectores $v(t)$ y $v'(t) = a(t)$ son perpendiculares.
Por consiguiente, la medida del ángulo que forman los vectores velocidad y aceleración es $\theta = \pi/2$.

EJERCICIOS

1.- Si $f(t) = (t; t; t^2), g(t) = (\cos t; sen\, t; t), \varphi(t) = e^{-t}$, halle

a) $\frac{d}{dt}(g(t))$ b) $f''(t)$ c) $(f \bullet g)'(t)$ d) $\frac{d}{dt}[f(t) \times g(t)]$

e) $[\varphi(t)f(t)]'$ f) $\frac{d}{dt}[f(\varphi(t))]$ g) $\frac{d}{dt}[\|g(t)\|]$ h) $\frac{d}{dt}[g(t^2)]$

i) $\frac{d}{dt}[\|f(t)\|^2]$ j) $\frac{d}{dt}[f(t) + g(t)]$

2.- En cada uno de los siguientes ejercicios, i) dibuje la curva representada por la función vectorial, ii) dibuje los vectores velocidad y aceleración para el valor de t indicado.

a) $f(t) = (2 + 3\cos(2t); 4 - 3sen\,(2t)),\ t = \frac{\pi}{4}$

b) $f(t) = (t + 2; t^2 + 4),\ t = 1$ c) $f(t) = (4e^{-t^2}; t),\ t = 1$

d) $f(t) = (2 + t^3; t^2 + 4),\ t = 1$ e) $f(t) = (sen\, t; t; \cos t),\ t = 0$

f) $f(t) = (2\cos t; 2\, sen\, t; 4),\ t = 2\pi$

3.- En cada uno de los siguientes ejercicios, halle la ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva descrita por la función vectorial en el punto indicado.

a) $f(t) = (t^5; t^4; t^3)$, $P(1; 1; 1)$

b) $f(t) = (sen\, t; 2t\, sen\, t; 4t^2)$, $P(1; \pi; \pi^2)$

c) $f(t) = (t\cos(3\pi t); t\, sen\,(3\pi t); 2t)$, $P(-1; 0; 2)$

d) $f(t) = (2\cos t; 2\, sen\, t; 16)$, $P(0; 2; 16)$

4.- En cada uno de los siguientes ejercicios, i) halle las ecuaciones de las rectas tangentes horizontales a la curva $\mathcal{C}$ descrita por la función vectorial, calculando los valores de t para los cuales $dy/dt = 0$ ii) obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes verticales a la curva $\mathcal{C}$, calculando los valores de t para los cuales $dx/dt = 0$.

a) $f(t) = (t^2 + t; t^2 - t)$ b) $f(t) = (4t^2 - 4t; 1 - 4t^2)$

c) $f(t) = \left(\dfrac{3at}{1+t^3}; \dfrac{3at^2}{1+t^3}\right)$ d) $f(t) = (4\, sen\, t; 7\cos t)$

5.- Halle $f'(t)$ y $f''(t)$ en las siguientes funciones vectoriales

a) $f(t) = (arcsen\, t; \ln(1 + 5t); t^2)$

b) $f(t) = (e^{5t}; \ln(t + 1); \arctan(t + 1))$

c) $f(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ d) $f(t) = (\cos t; sen\,(2t); tan\, t)$

e) $f(t) = (arcsen\, t; \arccos t)$ f) $f(t) = (\cosh t; senh\, 4t; e^{-5t})$

g) $f(t) = \left(\ln(1 + t^2); \dfrac{1}{1+t^2}; \arctan t\right)$

h) $f(t) = (|t|t; |t|; 1 - \ln(4 + t^2))$

6.- Sea g una función vectorial dada por $g(t) = \left(\dfrac{2t}{1+t^2}; \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; 1\right)$

Demuestre que el ángulo formado por $g(t)$ y $g'(t)$ es constante.

7.- Al medio día, un insecto se posa en el extremo del minutero de un reloj de radio 20 cm, y empieza a caminar hacia el centro del reloj con una rapidez de

$v = 1\ cm/seg$. Si el reloj funciona normalmente, determine el vector velocidad del insecto después de 30 seg de iniciado su caminata.

$$R.\ v(30) = \left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$$

8.- Considere la hélice descrita por la función vectorial

$$f(t) = (a\cos(\omega t); a\ sen\ (\omega t); b\omega t), \omega > 0$$

Demuestre que la recta tangente a la hélice en cualquier punto t, forma con el eje Z un ángulo cuyo coseno es $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

9.- Referido a la hélice del ejercicio 8, demuestre que los vectores velocidad $v(t)$ y aceleración $a(t)$ tienen longitud constante y que

$$\frac{\|v(t) \times a(t)\|}{\|v(t)\|^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

10.- Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas

$$C_1: f(t) = \left(\int_0^t sen\ x\, dx; \cos t\right), t \in [0;\pi],\quad C_2: g(t) = (e^t; 1 - e^{2t}), t \in \mathbb{R}$$

en el punto de intersección de ambas curvas.

R. $L_1 = \{(1;0) + t(1;-1) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(1;0) + t(1;-2) / t \in \mathbb{R}\}$

11.- Dada la curva $C: f(t) = (\cos t; sen\ t; e^t)$, determine el punto en el cual la tangente es paralela al plano $P: \sqrt{3}\,x + y - 4 = 0$ $R.\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}; e^{\pi/6}\right)$

12.- Halle la ecuación de la recta tangente a la curva

$$C: \begin{cases} xz - 2z - 3x + 3 = 0 \\ z^2 - yz - 4z + 3y + 4 = 0 \end{cases}$$; en el punto correspondiente a $t = 0$

$$R.\ L_T = \left\{\left(1; -\frac{4}{3}; 0\right) + t\left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{9}; 1\right) / t \in \mathbb{R}\right\}$$

13.- Sea $f(t) = (f_1(t); f_2(t); f_3(t))$ una función vectorial derivable de t hasta el segundo orden y que para $t \geq 2$, se tiene $\|f(t)\| = \sqrt{t-2}$

a) Demuestre que $f'(t) \bullet f'(t) = -f(t) \bullet f''(t),\ t \geq 2$

b) Si α es el ángulo que forman los vectores $f(t)$ y $f''(t)$, demuestre que

$$\alpha \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

14.- Considere que el cicloide descrito por la función vectorial

$$f(t) = (a(t - sen\ t); a(1 - \cos t)),\quad a > 0$$

Halle el ángulo que forma la recta tangente a la cicloide en $t = \pi/2$ con la parte positiva del eje X.

1.5 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES VECTORIALES

Definición 7. Si $f: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial continua en el intervalo $[a;b]$ tal que $f(t) = (f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t))$, entonces la integral indefinida de f es

$$\int f(t)dt = \left(\int f_1(t)dt; \int f_2(t)dt; \dots; \int f_n(t)dt\right)$$

y la integral definida de f es

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt; \int_a^b f_2(t)dt; \dots; \int_a^b f_n(t)dt\right)$$

Observación 5. Si $f(t) = (f_1(t); f_2(t); \dots; f_n(t))$ es una función vectorial con imagen en el espacio $\mathbb{R}^n$, entonces al hallar la integral indefinida de f, se tiene

$$\int f_1(t)dt = F_1(t) + C_1, \int f_2(t)dt = F_2(t) + C_2; \dots; \int f_n(t)dt = F_n(t) + C_n$$

Así, la integral indefinida de la función vectorial f se expresa

$$\int f(t)dt = (F_1(t) + C_1; F_2(t) + C_2; \dots; F_n(t) + C_n)$$

$$= (F_1(t); F_2(t); \dots; F_n(t)) + (C_1; C_2; \dots; C_n)$$

$$= F(t) + \vec{C}$$

donde $F'(t) = f(t)$

Ejemplo 19.

a) Halle la integral indefinida de la función vectorial

$$f(t) = \left(\cos t\,; \frac{1}{1+t}; te^t\right)$$

b) Calcule la integral $\int_0^1 f(t)dt$, donde $f(t) = \left(2t; \frac{1}{1+t}; te^t\right)$

Solución

a) Al integrar cada una de las funciones componentes, se obtiene

$$\int f(t)dt = \left(\int \cos t\ dt\,; \int \frac{1}{1+t^2}dt\,; \int t^2 dt\right) = \left(sen\ t; arctan\ t; \frac{t^3}{3}\right) + \vec{C}$$

b) $$\int_0^1 f(t)dt = \left(\int_0^1 2t\ dt\,; \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt\,; \int_0^1 te^t\ dt\right)$$

$$= ([t^2]_0^1; [\ln(|1+t|)]_0^1; [te^t - e^t]_0^1) = (1; \ln 2\,; 1)$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1.- Si $f, g: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ son funciones vectoriales continuas en $[a;b]$ y α y β son escalares, entonces

$$\int_a^b [\alpha\, f(t) \pm \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

2.- Si $f, g: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial continua en $[a;b]$ y $\vec{C} = (C_1; \dots; C_n)$ es un vector de constantes, entonces

a) $$\int_a^b [\vec{C} \bullet f(t)]dt = \vec{C} \bullet \left(\int_a^b f(t)dt\right)$$

b) $$\int_a^b [\vec{C} \times f(t)]dt = \vec{C} \times \left(\int_a^b f(t)dt\right)$$ (válido solo en el espacio $\mathbb{R}^3$)

3.- Si $f: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial continua en $[a;b]$, entonces

$$\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$$

Teorema 3. (Primer Teorema Fundamental del Cálculo).

Sea $f: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial continua en $[a;b]$, entonces la función F definida por

$$F(t) = \int_a^t f(u)du\,, \quad a \leq t \leq b$$

es derivable y $F'(t) = f(t), \forall t \in [a;b]$

Teorema 4. (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo).
Sea $f: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial continua en $[a; b]$, entonces

$$\int_a^b f(t)dt = F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 20. Calcule $\int_0^{\pi/4} f(t)dt \times h(0)$, donde

$$f(t) = \left(\sqrt{\tan t}\ sec^4 t; sen^3(2t)\cos^2 t - sen^3(2t)sen^2 t; \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right) \text{ y}$$

$$h(t) = \left(\int_{-1}^{1} te^{t^2-1}\,dt; \int_0^1 (t^2 - t)\,dt; \int_0^1 t^3\,dt\right)$$

Solución

$$\int_0^{\pi/4} f(t)dt = \left(\int_0^{\pi/4} (\tan t)^{1/2}(1 + tan^2 t)sec^2 t\,dt; \int_0^{\pi/4} sen^3(2t)\cos(2t)\,dt; \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,dt\right)$$

$$= \left(\frac{20}{21}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}\right)$$

$$h(t) = \left(0; -\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right) \Longrightarrow h(0) = \left(0; -\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$$

Por consiguiente, se tiene

$$\int_0^{\pi/4} f(t)dt \times h(0) = \left(\frac{5}{288}; -\frac{5}{2}; -\frac{10}{63}\right)$$

Ejemplo 21. La fuerza que actúa sobre una partícula de masa $m = 2$ en el plano está dada en función del tiempo t por la ecuación

$$F(t) = (2(\cos t\ t\ sen\ t); 2(sen\ t + t\cos t))$$

Cuando $t = 0$ la posición y la velocidad de la partícula son $f(0) = (2; 0)$ y $v(0) = (1; 0)$. Halle la velocidad y la posición de la partícula como funciones de t.

Solución

Por la segunda Ley de Newton, se tiene

$$F(t) = ma(t) = 2f''(t) = (2(\cos t - t\ sen\ t); 2(sen\ t + t\cos t))$$

De donde resulta

$$f''(t) = (\cos t - t\ sen\ t; sen\ t + t\cos t)$$

$$f'(t) = \int f''(t)dt = \left(\int (\cos t - t\ sen\ t)dt : \int (sen\ t + t\cos t)dt\right)$$

$$= (t\cos t\,; t\ sen\ t) + \vec{C}$$

Dado que $v(0) = f'(0) = \vec{C} = (1; 0)$. Entonces, $f'(t) = (t\cos t + 1 : t\ sen\ t)$

$$f(t) = \int f'(t)dt = (t\ sen\ t + \cos t + t; -t\cos t + sen\ t) + \overrightarrow{C_1}$$

Como $f(0) = (1; 0) + \overrightarrow{C_1} = (2; 0) \Rightarrow \overrightarrow{C_1} = (1; 0)$

Por tanto,

$$f(t) = (t\ sen\ t + \cos t + t + 1; -t\cos t + sen\ t)$$

Ejemplo 22. Una partícula inicia su movimiento en $f(0) = (2; 0; 0)$ con velocidad inicial $v(0) = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$. Su aceleración es $a(t) = (2t; 3t^2; 6t)$. Determine la función velocidad y la posición de la partícula en cualquier instante t.

Solución

$$a(t) = v'(t) = (2t; 3t^2; 6t) \Rightarrow v(t) = \int v'(t)dt = (t^2; t^3; 3t^2) + \vec{C}$$

Como $v(0) = (0; 0; 0) + \vec{C} = (1; -1; 1) \Rightarrow \vec{C} = (1; -1; 1)$

Luego, la velocidad que satisface la condición inicial $v(0) = (1; -1; 1)$ es

$$v(t) = (t^2 + 1; t^3 - 1; 3t^2 + 1)$$

Dado que

$$f'(t) = v(t) = (t^2 + 1; t^3 - 1; 3t^2 + 1)$$

Entonces $f(t) = \int v(t)dt = \left(\frac{t^3}{3} + t; \frac{t^4}{4} - t; t^3 + t\right) + \overrightarrow{C_1}$

Al hacer $t = 0$ y utilizando el hecho de que $f(0) = (2; 0; 0)$, se tiene

$$f(0) = (0; 0; 0) + \overrightarrow{C_1} = (2; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{C_1} = (2; 0; 0)$$

Por consiguiente, la función de posición de la partícula en cualquier instante t es

$$f(t) = \left(\frac{t^3}{3} + t + 2; \frac{t^4}{4} - t; t^3 + t\right)$$

EJERCICIOS

1.- Calcule las siguientes integrales

a) $\int_0^1 (t; t^{1/2}; e^t)dt$ b) $\int_0^{\pi/2} (sen\, t; \cos t\,; sen^3 t \cos t)dt$

c) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} (e^{sen\, t}[csc^2 t - sec^2 t - \csc t]; \sec t\,; \csc t)\, dt$

d) $\int_0^1 (te^t; t^2 e^t; te^{-t})dt$ $R.\ (1; e-2; 1-2e^{-1})$

2.- Calcule $\vec{a} \bullet \vec{b}$, si $\vec{a} = (2; -4; 1)$ y $\vec{b} = \int_0^1 (te^{2t}; t\cosh 2t\,; 2te^{-2t})dt$

3.- Una función vectorial f satisface la ecuación: $t\,f'(t) = f(t) + t\vec{a}, t > 0$. donde $\vec{a}$ es un vector no nulo en el espacio $\mathbb{R}^3$. Si se sabe que $f(1) = 2\vec{a}$ y $f'(1) = 3\vec{a}$, calcule $f''(1)$ y $f(3)$ en términos del vector $\vec{a}$.

R. $f'(1) = \vec{a}\,, f(3) = (6 + 3\ln 3)\vec{a}$

4.- Sean las funciones vectoriales $f(t) = (te^{-t}; 1; e^t)$ y $g(t) = (1; -1; t)$. Calcule

a) $\int_{-1}^{0} [f(t) \times g(t)]dt$ b) $\int_{-1}^{0} [f(t) \bullet g(t)]dt$

5.- Sean $f, g\colon [a; b] \to \mathbb{R}^n$ funciones vectoriales continuas y derivables de t. Demuestre que

$$\int_a^b [f(t) \bullet g(t)]dt = [f(t) \bullet g(t)]_a^b - \int_a^b [f'(t) \bullet g(t)]dt$$

6.- Sean $\vec{a}$ un vector no nulo en el espacio $\mathbb{R}^n$ y f una función vectorial tal que $f(t) \bullet \vec{a} = t,\ \forall t \in \mathbb{R}$.
Si el ángulo que forman $f'(t)$ y $\vec{a}$ es constante, demuestre que $f''(t)$ es perpendicular a $f'(t)$.

1.6 CURVAS REGULARES

Definición 8. Se dice que una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada, si existe una función vectorial $\alpha\colon [a; b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha([a; b]) = \mathcal{C}$.
A la función vectorial $\alpha(t) = (\alpha_1(t); \alpha_2(t); \dots; \alpha_n(t))$ se llama parametrización de la curva $\mathcal{C}$.

Ejemplo 23. La función vectorial $\alpha\colon [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = (\cos t\, ; sen\ t)$$

es una parametrización de la curva $\mathcal{C}\colon x^2 + y^2 = 1$

Ejemplo 24. La función vectorial $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t; t), & t \le 0 \\ (t; t^2), & t > 0 \end{cases}$$

es una parametrización de la curva

$$C\colon\ y = f(x) = \begin{cases} x\,, x \le 0 \\ x^2\,, x > 0 \end{cases}$$

La gráfica de $\mathcal{C}$ se muestra en la figura 1.11

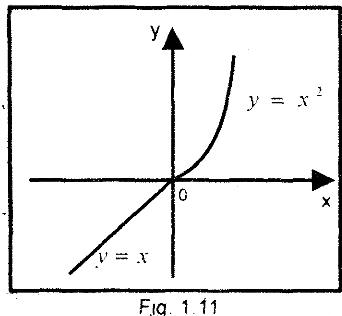


Fig. 1.11

Ejemplo 25. Halle la parametrización de la curva

$$C\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 & , \quad R > 0 \\ z = a & , \quad 0 < a < R \end{cases}$$

Solución

Al reemplazar $z = a$ en la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, se obtiene

$$\mathcal{C}_1\colon x^2 + y^2 = R^2 - a^2$$

La parametrización de la curva $\mathcal{C}_1$ es

$$\mathcal{C}_1\colon \begin{cases} x = \sqrt{R^2 - a^2}\cos t\ , t \in [0; 2\pi] \\ y = \sqrt{R^2 - a^2}\ sen\ t \end{cases}$$

Fig. 1.12

Luego, existe una función vectorial $\alpha\colon [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\alpha(t) = (\sqrt{R^2 - a^2}\cos t\, ; \sqrt{R^2 - a^2} sen\ t ; a)\ , t \in [0; 2\pi]$$

La imagen de esta función vectorial se muestra en la figura 1.12

Definición 9. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ una curva parametrizada, esto es, existe una función vectorial $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$, tal que $\alpha([a; b]) = \mathcal{C}$

i) Se dice que $\mathcal{C}$ es una curva con puntos dobles si $\alpha(t_1) = \alpha(t_2), t_1 \neq t_2$ (Fig. 1.13)

ii) Se dice que $\mathcal{C}$ es una curva simple si no tiene puntos dobles (Fig. 1.14)

iii) Se dice que $\mathcal{C}$ es una curva cerrada si $\alpha(a) = \alpha(b)$ (Fig. 1.15)

iv) Se dice que $\mathcal{C}$ es una curva regular, si la función vectorial $\alpha(t)$ tiene derivada continua y $\alpha'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a; b]$

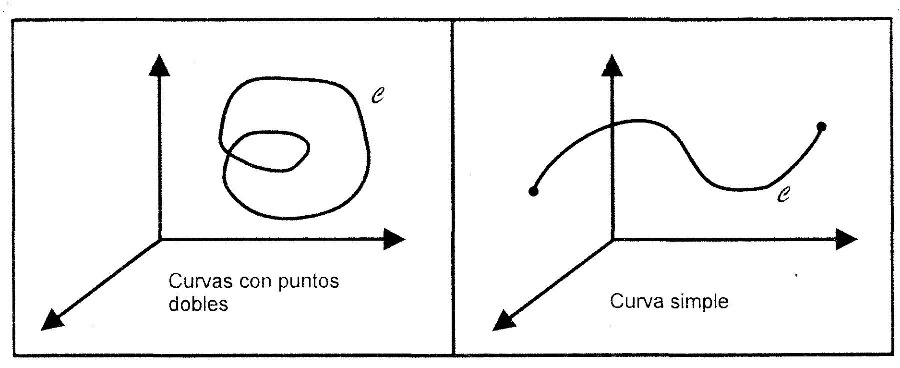


Fig. 1.13 Fig. 1.14

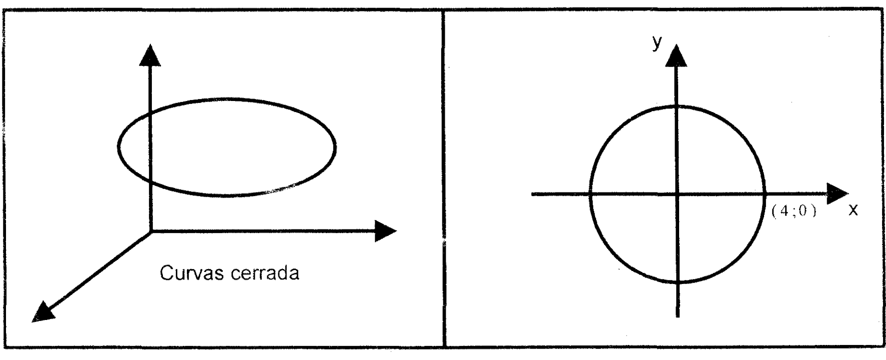


Fig. 1.15 Fig. 1.16

Ejemplo 26. La imagen de la función vectorial $\alpha: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (4\cos t\, ; 4\ sen\ t)$ es una curva cerrada (Fig. 1.16), pues

$\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (4; 0)$

Ejemplo 27. La imagen de la función vectorial $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t^3 + 2t^2; t^3 - t)$ es una curva con puntos dobles, pues para

$$t_1 = \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{13}\right) \text{ y } t_2 = \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{13}\right) \text{ se cumple}$$

$$\alpha(t_1) = \left(\frac{9}{8}; -\frac{3}{8}\right) = \alpha(t_2)$$

Ejemplo 28. La imagen de la función vectorial $\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $\alpha(t) = (a\cos t\,; a\,sen\,t; bt)$ $(a > 0, b > 0)$ es una curva regular, pues

$$\alpha'(t) = (-a\,sen\,t; a\cos t\,; b) \neq (0;0;0), \forall t \in \mathbb{R}$$

Definición 10. (Reparametrización de una curva regular)

Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ una curva regular, es decir, existe una función vectorial $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha([a;b]) = C$ y $\alpha'(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a;b]$.

Una reparametrización de $\alpha(t)$ es una función vectorial $\gamma = \alpha \circ \varphi;\ [c;d] \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(u) = (\alpha \circ \varphi)(u) = \alpha(\varphi(u))\,, u \in [c;d]$ (Fig. 1.17)

donde $\varphi: [c;d] \to [a;b]$ es una función real derivable y sobreyectiva tal que $\varphi'(u) \neq 0, \forall u \in [c;d]$.

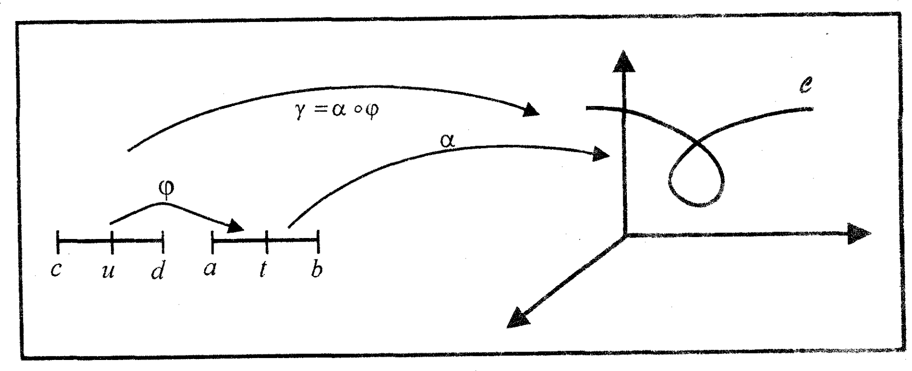


Fig. 1.17

Observación 6.

i) Si $\varphi'(t) > 0$ se conserva la misma orientación en la curva reparametrizada.

ii) Si $\varphi'(t) < 0$ se invierte la orientación en la curva reparametrizada.

Ejemplo 29. Sea $\alpha: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ una función vectorial dada por

$$\alpha(t) = (\cos t\,; sen\,t)$$

a) Si $\varphi: [0;1] \to [0;2\pi]$ es una función real definida por $\varphi(u) = 2\pi u$, entonces $\gamma(u) = (\alpha \circ \varphi)(u) = \alpha(\varphi(u)) = (\cos(2\pi u) ; sen\,(2\pi u))$ es una reparametrización de la curva $\alpha(t)$.
Como $\varphi'(u) = 2\pi > 0$, entonces la curva $\gamma(u)$ mantiene la misma orientación de la curva $\alpha(t)$.

b) Si $\phi: [0;2\pi] \to [0;2\pi]$ es una función real dada por

$$\phi(u) = 2\pi - u,$$

entonces $\gamma(u) = (\alpha \circ \phi)(u) = \alpha(\phi(u) = (\cos(2\pi - u) ; sen\,(2\pi - u))$ es una reparametrización de $\alpha(t)$.
Como $\phi'(u) = -1 < 0$, entonces la curva $\gamma(u)$ invierte la orientación de la curva $\alpha(t)$.

LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA REGULAR

Definición 11. Sea $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular en $[a;b]$, tal que

$$\mathcal{C}: \alpha(t) = (\alpha_1(t); \alpha_2(t); \ldots ; \alpha_n(t))$$

La longitud de arco de la curva medida desde $t = a$ hasta $t = b$ es

$$L(C) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{[\alpha_1'(t)]^2 + \cdots + [\alpha_n'(t)]^2}\, dt$$

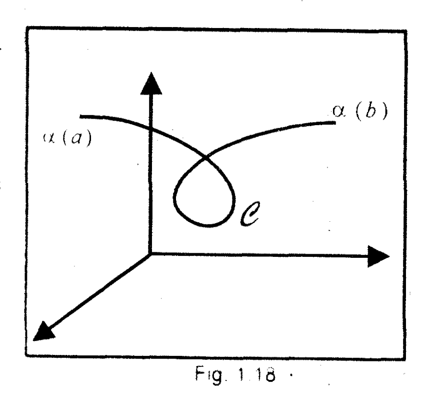


Fig. 1.18

Observación 7. La función longitud de arco de la curva $\alpha(t)$ es dada por

$$s(t) = l(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \;, t \in [a;b]$$

Ejemplo 30. Halle la longitud de arco de las siguientes curvas

a) $\alpha(t) = (a\cos t ; a\,sen\,t; bt)$, desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$

b) $\alpha(t) = \left(t; 1; \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^{-1}\right)$, desde $t = 1$ hasta $t = 3$

c) $\alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t; \frac{t^2}{2} - t; \frac{\sqrt{2}}{2}\ln t\right)$ $(t > 0)$, desde $t = 1$ hasta $t = 2$

d) $\alpha(t) = \left(\int_1^t \frac{\cos u}{\sqrt{2u}} du; \int_1^t \frac{sen\, u}{\sqrt{2u}} du; 4t^{1/2}\right)$, desde $t = 1$ hasta $t = 4$

Solución

a) $\alpha'(t) = (-a\, sen\, t; a\cos t; b)$ y $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Luego, la longitud de arco desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$ es

$$L(\mathscr{C}) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}\, u$$

b) $\alpha'(t) = \left(1; 0; \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^{-2}\right)$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}(t^2 - t^{-2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(t^2 + t^{-2})^2} = \frac{1}{2}(t^2 + t^{-2})$$

Por tanto, la longitud de arco de la curva desde $t = 1$ hasta $t = 3$ es

$$L(\mathscr{C}) = \int_1^3 \|\alpha'(t)\| dt = \int_1^3 \frac{1}{2}(t^2 + t^{-2}) = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{1}{t}\right]_1^3 = \frac{14}{3}u$$

c) $\alpha'(t) = \left(t + 1; t - 1; \frac{\sqrt{2}}{2t}\right)$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(t+1)^2 + (t-1)^2 + \frac{1}{2t^2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\, t + \frac{1}{\sqrt{2}\, t}\right)^2} = \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}\, t}$$

Por consiguiente, la longitud de arco de la curva desde $t = 1$ hasta $t = 2$ es

$$L(\mathscr{C}) = \int_1^2 \|\alpha'(t)\| dt = \int_1^2 \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}t}\right) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}(3 + \ln 2)u$$

d) $\alpha'(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2t}}; \frac{sen\, t}{\sqrt{2t}}; \frac{2}{\sqrt{t}}\right)$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{cos^2 t}{2t} + \frac{sen^2 t}{2t} + \frac{4}{t}} = \sqrt{\frac{9}{2t}} = \frac{3}{\sqrt{2}}t^{-1/2}$$

Luego, la longitud de arco de la curva desde $t = 1$ hasta $t = 4$ es

$$L(C) = \int_1^4 \|\alpha'(t)\| dt = \int_1^4 \frac{3}{\sqrt{2}} t^{-1/2} = 3\sqrt{2}\, u$$

Ejemplo 31. Halle la longitud de la curva $\alpha(t) = (t; 1 + t^2)$, desde el punto en que los vectores $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son paralelos de sentidos opuestos hasta el punto en que los mismos vectores son ortogonales.

Solución

i) Si t_0 es el valor de t donde $\alpha(t)$ y $\alpha'(t) = (1; 2t)$ son paralelos, entonces

$$\alpha(t_0) = (t_0; 1 + t_0^2) = k\alpha'(t_0) = k(1; 2t_0)$$

De donde resulta $k = t_0$ y $t_0 = \pm 1$

Para $t_0 = -1$, los vectores $\alpha(-1) = (-1; 2)$ y $\alpha'(-1) = (1; -2)$ son paralelos y tienen sentidos opuestos.

Para $t_0 = 1$, los vectores $\alpha(1) = (1; 2)$ y $\alpha'(1) = (1; 2)$ son paralelos y tienen el mismo sentido. Luego, el valor de t_0 que cumple con las condiciones del problema es $t_0 = -1$

ii) Si t_1 es el valor de t donde $\alpha(t)$ y $\alpha'(t)$ son ortogonales, entonces

$$\alpha(t_1) \bullet \alpha'(t_1) = 3t_1 + 2t_1^3 = t_1(3 + 2t_1^2) = 0$$

Luego, el valor de t_1 que cumple con las condiciones del problema es $t_1 = 0$

Por consiguiente, la longitud de arco de la curva desde $t = -1$ hasta $t = 0$ es

$$L = \int_{-1}^{0} \|\alpha'(t)\| dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \left[\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{5} - 2)\right] u$$

Ejemplo 32. Sean las curvas

$$C_1: \alpha(t) = 2^{\frac{t}{\ln 2}}(\cos t\,; sen\ t; 3), 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$C_2: \beta(t) = (t + 1; t^2; 3t + 3)$$

¿En cuánto debe incrementarse t para que la longitud de arco de la curva C_1 sea igual a $\sqrt{11}$ desde el instante en que C_2 interseca a C_1?

Solución

Sean t_1 y t_2 los valores del parámetro t en las cuales las curvas C_1 y C_2 se cortan, esto es

$$\alpha(t_1) = 2^{\frac{t_1}{\ln 2}}(\cos t_1\,; sen\ t_1; 3) = \beta(t_2) = (t_2 + 1; t_2{}^2; 3t_2 + 3)$$

De esta igualdad, se tiene

$$\begin{cases} t_2 + 1 = 2^{\frac{t_1}{\ln 2}} \cos(t_1) \ldots & (1) \\ t_2^2 = 2^{\frac{t_1}{\ln 2}} \operatorname{sen}(t_1) \quad \ldots & (2) \\ 3t_2 + 3 = 3.\, 2^{\frac{t_1}{\ln 2}} \quad \ldots & (3) \end{cases}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (3), se obtiene $\cos(t_1) = 1$, de donde resulta $t_1 = 0$ ó $t_1 = 2\pi$

Para $t_1 = 0$, se tiene $t_2 = 0$ y estos dos valores satisfacen las tres ecuaciones

Para $t_1 = 2\pi$, se obtiene $t_2 = 2^{\frac{2\pi}{\ln 2}} - 1$ y estos valores no satisfacen la segunda ecuación.

Por consiguiente, las curvas C_1 y C_2 se intersecan para $t_1 = 0$ ó $t_2 = 0$

La derivada de la función vectorial α es

$\alpha'(t) = 2^{\frac{t}{\ln 2}}(\cos t - sen\, t; sen\, t + \cos t\,; 3)$ y $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{11}.\, 2^{\frac{t}{\ln 2}}$

Luego, la longitud de arco de la curva C_1 desde $t = 0$ hasta t es

$$L(C) = \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt = \sqrt{11}\int_0^t 2^{\frac{u}{\ln 2}} du = \sqrt{11}\left(2^{\frac{t}{\ln 2}} - 1\right) = \sqrt{11}$$

De donde resulta

$$2^{\frac{t}{\ln 2}} - 1 = 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{t}{\ln 2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{t}{\ln 2} = 1 \Leftrightarrow t = \ln 2$$

Por tanto, el incremento de t debe ser $\ln 2$ desde $t = 0$.

Ejemplo 33. Una partícula se mueve en el espacio de modo que en cualquier instante t su posición es

$\alpha(t) = (2t\cos t\,; 2t\, sen\, t; -t^2 + 2t)$

a) Determine la rapidez de la partícula en el instante $t = 1$

b) Si la partícula toca al plano XY en el instante $t = 0$, halle otro instante t_1 en que la partícula toca nuevamente el plano XY.

c) Halle el espacio recorrido por la partícula desde $t = 0$ hasta $t = t_1$.

Solución

a) $\alpha'(t) = (2(\cos t - t\, sen\, t); 2(sen\, t + t\cos t); -2t + 2)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{4(\cos t - t\, sen\, t)^2 + 4(sen\, t + t\cos t)^2 + (2 - 2t)^2}$

$= 2\sqrt{2}\sqrt{t^2 - t + 1}$

Luego, la rapidez de la partícula en el instante $t = 1$ es

$$\|\alpha'(1)\| = 2\sqrt{2}$$

b) La partícula toca al plano XY cuando $z = 0$, esto es,

$$z = -t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2$$

Por consiguiente, el instante en que la partícula toca nuevamente al plano XY es $t = 2$.

c) El espacio recorrido por la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 2$ es

$$E = \int_0^2 \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^2 2\sqrt{2}\sqrt{t^2 - t + 1} = 2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{4}\ln\left(t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{3\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln(3+2\sqrt{3})\right]u$$

EJERCICIOS

1.- Encuentre la longitud de arco de las siguientes curvas:

a) $\alpha(t) = (2\,sen\,t; 5; 2\cos t),\ \ t \in [-10; 10]$

b) $\alpha(t) = \left(\sqrt{2}t; e^t; e^{-t}\right),\ \ 0 \leq t \leq 1$

c) $\alpha(t) = (2t; \ln t\,; t^2),\ \ 1 \leq t \leq e$

d) $\alpha(t) = \left(\int_0^t 2\cos(\pi u^2)\,du; \int_0^t 2\,sen\,(\pi u^2)\,du\,; 3\sqrt{5}t\right),\ \ 0 \leq t \leq \pi$

e) $\alpha(t) = a\left(t - sen\,t; 1-\cos t\,; 4\,sen\left(\frac{t}{2}\right)\right),\ \ t \in [0; 2\pi]$

f) $\alpha(t) = (t; \ln(\sec t); 3)$, desde $t = 0$ hasta $t = \frac{\pi}{4}$ $\quad R.\ \ln(1+\sqrt{2})$

g) $\alpha(t) = (a(\cos t + t\,sen\,t); a\,(sen\,t - t\cos t))\,, a > 0\,,\ \ t \in [0; 2\pi]$
R. $2\pi^2 a$

h) $\alpha(t) = (t; \ln(\sec t)\,; \ln(\sec t + \tan t))\,, t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ $\quad$ R. $\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$

i) $\alpha(t) = (e^t\cos t\,; e^t\,sen\,t),\ \ t \in [0; 2]$ $\quad$ R. $\sqrt{2}(e^2-1)$

2.- La imagen de la función vectorial $\gamma(t) = (\cos 4t\,; sen\,4t; 4)$ describe la trayectoria de una partícula que se mueve en el espacio $\mathbb{R}^3$

a) Trace la gráfica de la trayectoria que describe la partícula.

b) Dibuje los vectores velocidad y aceleración para $t = \pi/4$.

c) Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva descrita por la partícula en el punto $A(0; 1; 4)$

d) Calcule la longitud de la trayectoria que recorre la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.

3.- Sea la elipse descrita por $x = a\cos t\,, y = b\,sen\,t\,, t \in [0; 2\pi]\,, 0 < b < a$

Demuestre que la longitud de la elipse es $L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\,sen^2 t}\,dt,$

donde e es la excentricidad de la elipse.

4.- Si una curva tiene la ecuación polar $r = f(\theta)$, donde $a \leq \theta \leq b \leq a + 2\pi$,

demuestre que la longitud de arco es $\displaystyle\int_a^b \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

5.- Use el ejercicio 4 para hallar la longitud de arco de las siguientes curvas dadas en coordenadas polares

a) La cardioide $r = 4(1 + \cos\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

b) $r = \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ R. $\frac{\pi}{2}(\pi^2 + 1)^{1/2} + \frac{1}{2}\ln(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1})$

c) $r = e^{\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ R. $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

d) $r = sen^2\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ R. $2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\ln(2 + \sqrt{3})$

e) $r = 1 - \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ R. 8

f) $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ R. 4

6.- En los siguientes ejercicios, represente la curva dada mediante la intersección de dos superficies. Halle ecuaciones paramétricas para cada curva.

a) $x^2 + z^2 = 4$, $y^2 + z^2 = 4$ (primer octante)

R. $x = t$, $y = t$, $z = \sqrt{4 - t^2}$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $xy = 4$ (primer octante)

R. $x = t$, $y = \frac{4}{t}$, $z = \frac{1}{t}\sqrt{-t^4 + 16t^2 - 16}$

7.- Sea C una curva en el espacio dada por $\alpha(t) = \displaystyle\int_0^t \beta(u)du$

donde $\beta(u) = (u\cos(u)\, ; u\, sen\,(u); 1)$

Calcule la longitud de arco de la curva C desde el punto $\alpha(0)$ hasta el punto $\alpha(1)$.

8.- Dadas las curvas

$$C_1: \alpha(t) = (sen\, t; 1 - \cos t\, ; t) \;\text{ y }\; C_2: \beta(t) = \left(1 - \cos t\, ; 4\, sen\left(\frac{t}{2}\right); t - sen\, t\right)$$

a) Halle si existe, un punto de intersección entre C_1 y C_2. En caso de que exista, halle el ángulo de intersección. R. $(0; 0; 0)$ y $\pi/2$

b) Calcule la longitud de arco de la curva C_2 comprendida entre los puntos

$(0; 0; 0)$ y $\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ R. $\frac{2\pi}{3}$

9.- Un punto recorre una curva $C \subset \mathbb{R}^3$ de manera que el vector posición $\alpha(t)$ siempre coincide con el vector tangente $\alpha'(t)$.

a) Halle la ecuación paramétrica de la curva C, si se sabe que $\alpha(0) = (a; b; c)$, donde $a, b, c > 0$ R. $\alpha(t) = (ae^t; be^t; ce^t)$

b) Halle la longitud de la curva C desde $t = 0$ hasta $t = 1$

R. $\sqrt{a+b+c}\,(e-1)$

10.- Dada la curva $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$

a) Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva C en el punto $(1; 1; 2)$ R. $L_T := \{(1; 1; 2) + t(-2; 0; 1) \;/\; t \in \mathbb{R}\}$

b) Halle la longitud de arco de la curva C desde $t = 0$ hasta $t = \sqrt{5}$ R. 5

11.- El salto de una vizcacha es descrita por la función vectorial $\alpha(t) = (t^2; 2|t|)$ Calcule la longitud recorrida en el tramo cuando $0 \le t \le 1$

R. $2\left[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)\right]$

1.7 VECTORES UNITARIOS: TANGENTE, NORMAL PRINCIPAL Y BINORMAL

1.9 Definición 11. Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular

El vector tangente unitario denotado por $T(t)$ en la dirección de $\alpha'(t)$ está dado por

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

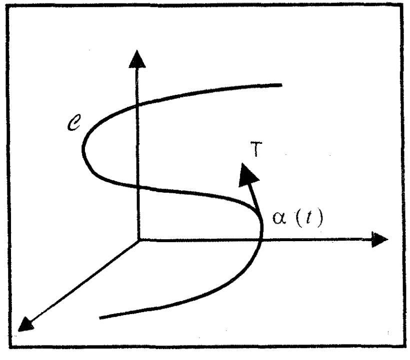


Fig. 1.19

Como $\|T(t)\| = 1$, entonces $T(t) \bullet T(t) = 1$; luego al derivar esta expresión, se tiene

$$2T(t) \bullet T'(t) = 0 \Leftrightarrow T(t) \bullet T'(t) = 0$$

Así, $T'(t)$ es un vector perpendicular al vector tangente $T(t)$, $\forall t \in [a; b]$.

Definición 12. El vector unitario que tiene la misma dirección que $T'(t)$ (si $T'(t) \neq \vec{0}$) se denomina normal principal a la curva $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ en el punto $\alpha(t)$ y se denota por

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|},$$

siempre que $\|T'(t)\| \neq 0$ (Fig.1.20)

Fig. 1.20

Como $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ es una curva regular, entonces la función longitud de arco de la curva $\alpha(t)$ es

$$l(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$$

La derivada de esta función real es

$$l'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

Luego, de la expresión del vector tangente unitario, se tiene

$$\alpha'(t) = l'(t)T(t) \qquad (*)$$

Esta ecuación indica que la dirección del vector velocidad $\alpha'(t)$ es igual a la del vector tangente unitario $T(t)$ y la velocidad escalar o rapidez es dada por

$$l'(t) = \|\alpha'(t)\|$$

Si un objeto se mueve a lo largo de una curva C, el vector tangente unitario $T(t)$ apunta en la dirección del movimiento, mientras que el vector normal principal $N(t)$ es ortogonal a $T(t)$ y señala la dirección hacia donde gira el objeto (lado cóncavo de la curva C). Además $\|N(t)\| = 1$, $\forall t \in [a; b]$.

Observación 8. Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular, tal que $\mathcal{C} = \alpha([a; b])$.

Si $\alpha'(t)$ es derivable en $[a; b]$, entonces al derivar la expresión (*) resulta

$$\alpha''(t) = l''(t)T(t) + l'(t)T'(t) = l''(t)T(t) + l'(t)\|T'(t)\|N(t)$$

Luego, el vector aceleración $\alpha''(t)$ es combinación lineal de los vectores tangente unitario $T(t)$ y normal principal $N(t)$.

Definición 13. Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular tal que

$$\alpha''(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a; b]$$

El vector unitario dado por

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

se denomina vector binormal a la curva $\mathcal{C} = \alpha([a; b])$ en el punto $\alpha(t)$ (Fig. 1.21)

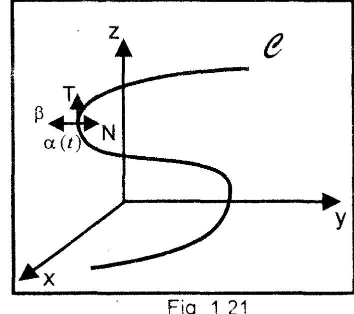


Fig 1.21

Observación 9. Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial que tiene derivadas continuas hasta el segundo orden, tal que $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ y $\alpha''(t) \neq \vec{0}, \forall t \in [a; b]$.

i) La ecuación de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t_0)$ es

$L_T: (x;y;z) = \alpha(t_0) + s\,T(t_0), s \in \mathbb{R}.$

ii) La ecuación de la recta normal a la curva en el punto $\alpha(t_0)$ es

$L_N: (x;y;z) = \alpha(t_0) + \lambda N(t_0), \lambda \in \mathbb{R}$

iii) Los tres vectores unitarios: tangente, normal principal y binormal forman el triedro móvil o intrínseco y satisfacen las siguientes relaciones

$$B(t) = T(t) \times N(t),\quad N(t) = B(t) \times T(t),\quad T(t) = N(t) \times B(t)$$

$$B(t) \bullet N(t) = 0\,,\quad N(t) \bullet T(t) = 0\,,\quad B(t) \bullet T(t) = 0\,, \forall t \in [a;b]$$

PLANOS FUNDAMENTALES GENERADOS POR EL TRIEDRO INTRINSECO

Definición 14. **(Plano osculador)**

Sea $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular. El plano que pasa por $\alpha(t_0)$ y es paralelo a los vectores $T(t_0)$ y $N(t_0)$ se llama plano osculador de la curva $C = \alpha([a;b])$ en el punto $\alpha(t_0)$. (Fig. 1.22). La ecuación cartesiana del plano osculador es

$$P_0: \left((x;y;z) - (x_0;y_0;z_0)\right) \bullet B(t_0) = 0$$

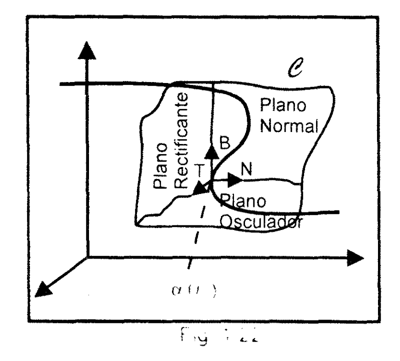


Fig. 1.22

Definición 15. **(Plano Normal Principal)**. El plano normal principal a la curva regular $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^3$ en el punto $\alpha(t_0) = (x_0;y_0;z_0)$, es el plano generado por N y B con normal T. La ecuación cartesiana de este plano es

$$P_N: \left((x;y;z) - (x_0;y_0;z_0)\right) \bullet T(t_0) = 0$$

Definición 16. **(Plano Rectificante)**. Es el plano generado por T y B con normal N. La ecuación cartesiana es

$$P_R: \left((x;y;z) - (x_0;y_0;z_0)\right) \bullet N(t_0) = 0$$

Ejemplo 34. Halle los vectores tangente unitario, normal principal y binormal de la espiral cónica $\alpha(t) = e^t\left(\cos t\ \vec{i} + sen\ t\,\vec{j} + \vec{k}\right)$ en un punto arbitrario.

Solución

$\alpha'(t) = (e^t(\cos t - sen\ t); e^t(sen\ t + \cos t); e^t), \|\alpha'(t)\| = \sqrt{3}\ e^t$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - sen\ t ; sen\ t + \cos t\,; 1)$$

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-sen\, t - \cos t\,; \cos t - sen\, t; 0)\ y\ \|T'(t)\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sen\, t - \cos t\,; \cos t - sen\, t; 0)$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}(\cos t - sen\, t); -\frac{1}{\sqrt{6}}(sen\, t + \cos t); \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

Ejemplo 35. Halle las ecuaciones de los planos normal principal, rectificante y osculador de la curva

$$\mathscr{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \ \dots\ (1) \\ x^2 - y^2 + z^2 = 4 \ \dots\ (2) \end{cases}$$

en el punto $A(1; 1; 2)$

Solución

Al eliminar la variable y en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene la curva proyectada sobre el plano XZ, esto es,

$$\mathscr{C}_0: x^2 + z^2 = 5$$

La parametrización de la curva $\mathscr{C}_0$ es

$$x = \sqrt{5}\cos t\ , z = \sqrt{5}\, sen\, t\ , t \in [0; 2\pi]$$

Además, si se reemplaza $x^2 + z^2 = 5$ en una de las ecuaciones (1) ó (2), resulta $y = 1$.

Luego, existe una función vectorial $\alpha: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{5}\cos t\,; 1; \sqrt{5}\, sen\, t\right), t \in [0; 2\pi]$$

Ahora, sea $t_0 \in [0; 2\pi]$, tal que

$$\alpha(t_0) = \left(\sqrt{5}\cos t_0\,; 1; \sqrt{5}\, sen\, t_0\right) = (1; 1; 2) \Rightarrow \cos t_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \ y\ sen\, t_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Así, los elementos del triedro móvil son:

$$\alpha'(t) = \left(-\sqrt{5}\, sen\, t; 0; \sqrt{5}\cos t\right) \Rightarrow \alpha'(t_0) = (-2; 0; 1)$$

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = (-sen\, t; 0; \cos t) \Rightarrow T(t_0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$T'(t) = (-\cos t\,; 0; -sen\, t)\ \ y\ \ \|T'(t)\| = 1$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = (-\cos t\,; 0; -sen\, t) \Rightarrow N(t_0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; 0; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$B(t_0) = T(t_0) \times N(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = (0; -1; 0)$$

Por tanto, las ecuaciones generadas de los planos son:
Plano normal principal: $2x - z = 0$
Plano rectificante: $x + 2z - 5 = 0$
Plano osculador: $y = 1$

Observación 10. Sea $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ una función vectorial cuyas funciones coordenadas tienen derivadas continuas hasta el segundo orden. Las expresiones de $T(t), N(t)$ y $B(t)$ en términos de la función $\alpha(t)$ y sus derivadas son

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, N(t) = \frac{[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \times \alpha'(t)}{\|[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \times \alpha'(t)\|}$$

Si $B(t) = \vec{b}$ ($\vec{b}$ vector constante) $\forall t \in I$, entonces la curva es plana. Así, la curva esta en el plano osculador.

Ejemplo 36. Sea la curva $C: \alpha(t) = \left(t; 1 - 2t^2; 1 - \frac{4t^3}{3}\right)$

Halle la ecuación del plano osculador de la curva C paralelo al plano $z = -4$

Solución

Se tiene

$$\alpha'(t) = (1; -4t; -4t^2), \alpha''(t) = (0; -4; -8t)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4t & -4t^2 \\ 0 & -4 & -8t \end{vmatrix} = (16t^2; 8t; -4)$$

Como el plano osculador es paralelo al plano $z = -4$, entonces el vector binormal (que es la normal al plano osculador) es paralelo al vector $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Así, la primera y segunda componente del vector $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ debe ser igual a cero, es decir

$$16t^2 = 0 \text{ y } 8t = 0 \Rightarrow t = 0$$

Luego, el punto de paso del plano osculador es

$\alpha(0) = (0; 1; 1)$ y $B(0) = (0,0,-1)$

Por tanto, la ecuación general del plano osculador es

$$P_o: [(x; y; z) - (0; 1; 1)] \bullet (0; 0; -1) = 0 \Leftrightarrow P_o: z = 1$$

Ejemplo 37. Sea C la curva intersección entre las superficies

$$C: y = (x - 2)^2 \wedge z = (x - 2)^2$$

Halle la ecuación cartesiana del plano osculador a la curva C en los puntos $(2; 0; 0), (3; 1; 1)$ y $(x_0; y_0; z_0)$

Solución

Al hacer $x = t$, la regla de correspondencia de la función vectorial que genera la curva C es

$$C: \alpha(t) = (t; (t-2)^2; (t-2)^2)\ , t \in \mathbb{R}$$

Luego, se tiene

$$\alpha'(t) = (1; 2(t-2); 2(t-2))\ ,\quad \alpha''(t) = (0; 2; 2)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2(t-2) & 2(t-2) \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (0; -2; 2)$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0; -2; 2) = \left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \vec{b}$$

Por consiguiente, la ecuación del plano osculador que pasa por el punto $(2; 0; 0)$ es

$$P_o: y - z = 0$$

Como el vector binormal $B(t) = \vec{b}$ es constante, entonces la curva C es plana y descansa sobre el plano osculador, $\forall t \in \mathbb{R}$.

EJERCICIOS

1.- Determine T y N para cada una de las siguientes curvas:

a) $\alpha(t) = (a\cos t\,; b\,sen\,t),\ \ t \in [0; 2\pi]\,, a, b > 0$

b) $\alpha(t) = (a\cosh t\,; b\,senh\,t),\ \ a, b > 0$

c) $\alpha(t) = (t\cos t\,; t\,sen\,t; at)\ ,\ \ a > 0$

d) $\alpha(t) = (a^2\cos t\,; a^2\,sen\,t; b^2\,t)$ en $t = t_0$, a, b constantes

e) $\alpha(t) = (3t^2; 2 + 8t^2; -5t^2)$ en $t = 0$

f) $\alpha(t) = (9\cos t\,; 9\,sen\,t; 3)$ en $t = \pi$

2.- En $t = 0$ y $t = 1$, encuentre el vector velocidad, el vector aceleración y la rapidez para cada una de las siguientes curvas

a) $\alpha(t) = (10\,sen\,2\pi t; 10\cos 2\pi t)$

b) $\alpha(t) = (\cos(\pi t^2)\,; sen\,(\pi t^2))$

c) $\alpha(t) = e^{-t}\left(\cos\frac{\pi}{2}t\,; sen\,\frac{\pi}{2}t\right)$

d) $\alpha(t) = (4\,sen\,2\pi t; 4\cos 2\pi t)$

e) $\alpha(t) = \left(\cos(200\pi t)\,; sen\,(200\pi t); \frac{t}{2\pi}\right)$

3.- Si $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, demuestre que

$$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|}\ ,\qquad N = B \times T = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'\|}$$

4.- Dada la curva $\alpha(t) = (t^2 + 1)\vec{\imath} + 8t\vec{\jmath} + (t^2 - 3)\vec{k}$, halle el vector tangente unitario en $t = 1$, escriba la ecuación del plano normal, plano osculador y plano rectificante en el punto $\alpha(1)$.

5.- Sea $\alpha(t)$ el vector posición de una partícula que se desplaza sobre la esfera de centro en el origen y radio r. Demuestre que el vector velocidad es perpendicular a $\alpha(t)$ en cada instante. **Sugerencia:** Derivar $\alpha(t) \bullet \alpha(t) = r^2$

6.- Dada la curva $\alpha = \alpha(t)$ y un punto fijo Q, demuestre que si la distancia $\|\alpha(t) - Q\|$ alcanza un mínimo para $t = t_0$, entonces $\alpha(t_0) - Q$ es normal a $\alpha'(t_0)$.
Sugerencia: $[\alpha(t) - Q] \bullet [\alpha(t) - Q]$ alcanza un mínimo en $t = t_0$

7.- Demuestre que la tangente a una hélice forma un ángulo constante con el ej Z y la normal es siempre perpendicular a ese eje.
Sugerencia: usar la parametrización $\alpha(t) = (a \cos wt\,; a\, sen\, wt; bt)$

8.- Determine los puntos en que la curva $\alpha(t) = (t^2 - 1; t^2 + 1; 3t)$ corta al plano $3x - 2y - z + 7 = 0$ R. $(3; 5; 6)$ y $(0; 2; 3)$

9.- Una partícula se mueve a lo largo de la elipse $3x^2 + y^2 = 1$ con vector posición $\alpha(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath}$. El movimiento es tal que la componente horizontal del vector velocidad en el instante t es $-g(t)$.

a) ¿Se mueve la partícula sobre la elipse en dirección a favor o contraria a las agujas del reloj? R. Contraria a las agujas del reloj.

b) Demuestre que la componente vertical del vector velocidad en el instante t es proporcional a $f(t)$ y halle el factor de proporcionalidad. R. 3

c) ¿Cuánto tiempo se necesita para que la partícula recorra toda la elipse una vez? R. $2\pi/\sqrt{3}$

10.- Si una partícula se mueve sobre la curva $\alpha(t)$, verifique que la aceleración $\alpha''(t)$ es siempre paralela al plano osculador.

11.- Halle los vectores T, N y B asociado a la curva $\alpha(t) = (t; t^2; t^3)$. Además, halle las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en $t = 1$.

12.- Halle las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a la curva $\alpha(t) = (e^t + 1; e^{-t} - 1; t)$ en $t = 0$.

13.- Si $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular y $B'(t)$ existe, demuestre que $B'(t)$ es paralela a $N(t)$.

14.- Determínese T, N y B los planos osculador, normal y rectificante en $\alpha(0)$ para las siguientes curvas:

a) $\alpha(t) = (t\cos t\,; t\,sen\,t; t)$ b) $\alpha(t) = (t - sen\,t; 1 - \cos t\,; t)$

c) $\alpha(t) = (t^2; \cos t\,; sen\,t)$ en $t = 1$

d) $\alpha(t) = (t; 1 - t; t + t^2)$ en $(1; 0; 2)$. Demuestre que el plano osculador es paralelo al eje Z.

15.- Dada la curva $C: \alpha(t) = (t; \ln(\sec t)\,; \ln(\sec t + \tan t))$; halle el triedro móvil en el punto en que la curva corta al plano XZ.

$$R.\ T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1), \qquad N = (0; 1; 0), \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1; 0; 1)$$

1.8 CURVATURA Y TORSIÓN DE UNA CURVA

REPARAMETRIZACIÓN DE UNA CURVA RESPECTO AL PARÁMETRO LONGITUD DE ARCO

Teorema 5. Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular tal que $\alpha([a; b]) = \mathcal{C}$ y la longitud de arco de la curva desde $t = a$ hasta $t = b$ es $L = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$

Entonces, la función longitud de arco $l: [a; b] \to [0; L]$ dada por

$$s = l(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\|dt$$

es continua y monótona creciente en el intervalo $[a; b]$.

Definición 17. Una curva regular $\gamma: [0; L] \to \mathbb{R}^n$ es parametrizada por la longitud de arco s, si y solo si $\|\gamma'(s)\| = 1$, $\forall s \in [0; L]$

Teorema 6. Toda curva parametrizada por longitud de arco $\gamma: [0; L] \to \mathbb{R}^n$ es una reparametrización de una curva regular $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ y está dada por

$$\gamma(s) = \alpha(\varphi(s))\,, \forall s \in [0; L]$$

donde $L = \int_a^b \|\alpha'(t)\|dt$ y $\varphi(s) = l^{-1}(s), s \in [0; L]$

En la figura 1.23 se muestra la curva reparametrizada γ.

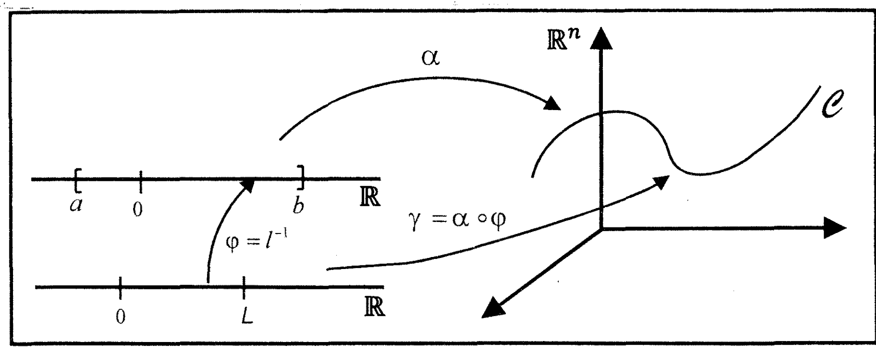


Fig. 1.23

Ejemplo 38. Sea $\alpha\colon [0; +\infty\rangle \to \mathbb{R}^3$ una curva regular definida por

$\alpha(t) = (\cos t\,; sen\ t; t)$

Halle: a) $s = l(t)$ b) $\varphi(s) = l^{-1}(s)$ c) $\gamma(s) = \alpha(\varphi(s))$ d) $T(s)$

Solución

$\alpha'(t) = (-sen\ t; \cos t\,; 1)$

a) $s = l(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{sen^2 u + cos^2 u + 1}\, du = \sqrt{2}\, t\,, t \geq 0$

b) Como $s = l(t) = \sqrt{2}t$, entonces la inversa de esta función es

$$\varphi(s) = l^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{2}}\,, s \geq 0$$

c) La reparametrización de la curva regular α en función de la longitud de arco s es

$$\gamma(s) = \alpha(\varphi(s)) = \alpha\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right); sen\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right); \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

d) $\gamma'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} sen\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\|\gamma'(s)\| = 1\,, \forall s \geq 0$

Por consiguiente, el vector tangente unitario $T(s)$ es

$$T(s) = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|} = \gamma'(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} sen\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ejemplo 39. Dada la curva

$C\colon \alpha(t) = (t; \ln(\sec t)\,; \ln(\sec t + \tan t))\,, t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

a) Halle la longitud de arco de C.

b) Reparametrice C en términos de longitud de arco.

Solución

a) $L = \int_0^{\pi/4} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sec t \; dt = \sqrt{2}\, \ln(\sqrt{2}+1)$

b) $s = l(t) = \int_0^{t} \|\alpha'(u)\| du = \sqrt{2}\, \ln(\sec t + \tan t)\ , t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Al despejar t en términos de s, se tiene

$$t = \varphi(s) = arcsen\left(\frac{e^{\frac{2s}{\sqrt{2}}} - 1}{e^{\frac{2s}{\sqrt{2}}} + 1}\right) = arcsen\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\ , s \in \left[0; \sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right]$$

Por consiguiente,

$$\gamma(s) = \alpha(\varphi(s))$$

$$= \left(arcsen\left(\tanh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right); \ln\left(\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right); \ln\left[\cosh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + senh\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]\right)$$

$\forall s \in \left[0; \sqrt{2}\, \ln(\sqrt{2}+1)\right]$

CURVATURA

Definición 18. Sea $\mathcal{C}$ una curva regular en el espacio $\mathbb{R}^3$ parametrizada por la longitud de arco, esto es, existe $\gamma: [0; L] \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma([0; L]) = \mathcal{C}$. Sea $T(s) = \gamma'(s)$ el vector tangente unitario a la curva en el punto $\gamma(s)$. (Fig. 1.24)

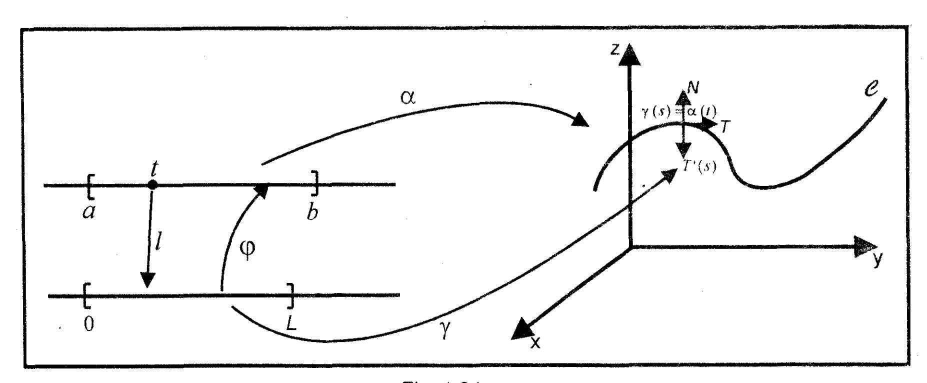


Fig. 1.24

La razón de cambio del vector $T(t)$ con respecto a la longitud de arco s, esto es, $\frac{dT}{ds}$ se denomina vector curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\gamma(s)$ y es dado por

$$K(t) = \frac{dT(t)}{ds} = \frac{dT}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = T'(t)\cdot\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{T'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \left(\frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}\right)N(t) \quad (*)$$

Luego, el vector curvatura $K(t)$ tiene la misma dirección que el vector unitario normal principal $N(t)$ y es ortogonal al vector tangente unitario.

Definición 19. La función escalar que multiplica a $N(t)$ en (*) se denomina curvatura de la curva C en el punto $\alpha(t)$ (Fig. 1.24) y se denota por

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}$$

La curvatura $k(t)$ es un número real que nos indica que tanto se tuerce (o se dobla) la curvatura C en el punto $\alpha(t)$.

Observación 11.

i) La curvatura de una recta es igual a cero.

ii) La curvatura de una circunferencia de radio a es $\frac{1}{a}$, esto es

$$k(t) = \frac{1}{a}, \forall t \in \mathbb{R}$$

iii) La curvatura de una curva plana en su punto de inflexión es igual a cero.

iv) Si $C: \alpha: I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular, entonces la curvatura de la curva C en el punto $\alpha(t)$ en términos de sus derivadas es dado por

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad (\text{solo en } \mathbb{R}^3)$$

v) Si C es una curva plana regular en $\mathbb{R}^2$, entonces puede presentarse los siguientes casos:

a) Si la ecuación de la curva C es $C: y = f(x)$, entonces la curvatura de C en el punto de abscisa $x = a$ es dado por

$$k = \frac{|f''(a)|}{[1 + (f'(a))^2]^{3/2}}$$

b) Si la ecuación de la curva es $C: x = g(y)$. entonces la curvatura de la curva C en el punto de ordenada $y = b$ es

$$k = \frac{|g''(b)|}{[1 + (g'(b))^2]^{3/2}}$$

c) Si la ecuación de una curva C viene dada en su forma polar $C: r = g(\theta)$, entonces la curvatura de la curva C en el punto correspondiente a θ_0 es

$$k = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)}{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Ejemplo 40. Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$
Determine la curvatura de $\mathcal{C}$ en el punto $(3; -1; 1)$.

Solución

Al completar cuadrados en las variables x e y, se tiene

$$\mathcal{C}: \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Luego, al parametrizar la curva se obtiene

$C: \alpha(t) = (1 + 2\cos t\,; 2\,sen\,t - 1; \cos t - sen\,t)$ y $\alpha(0) = (3; -1; 1)$

De donde resulta

$\alpha'(t) = (-2\,sen\,t; 2\cos t\,; -sen\,t - \cos t)$ y $\alpha'(0) = (0; 2; -1)$

$\alpha''(t) = (-2\cos t\,; -2\,sen\,t; -\cos t + sen\,t)$ y $\alpha''(0) = (-2; 0; -1)$

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2; 2; 4)$$

Por tanto, la curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(0) = (3; -1; 1)$ es

$$k = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{5}}$$

Ejemplo 41.- Sea la curva $\mathcal{C}: \alpha(t) = \left(\frac{t^2}{2} + t; \frac{t^2}{2} - t; \frac{\sqrt{2}}{2}\ln t\right)$

Halle la curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto donde la curva corta al plano XY.

Solución

La curva $\mathcal{C}$ interseca al plano XY cuando la tercera componente de su vector posición $\alpha(t)$ es cero, esto es

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\ln t = 0 \Longrightarrow t = 1$$

Luego, el punto de intersección de la curva $\mathcal{C}$ con el plano XY es

$$\alpha(1) = P\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$$

Al derivar la función vectorial, se tiene

$$\alpha'(t) = \left(t+1; t-1; \frac{\sqrt{2}}{2t}\right) \text{ y } \alpha'(1) = \left(2; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\alpha''(t) = \left(1; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2t^2}\right) \text{ y } \alpha''(1) = \left(1; 1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\alpha'(1) \times \alpha''(1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}; 2\right)$$

Por consiguiente, la curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $P\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ es

$$k(1) = \frac{\|\alpha'(1) \times \alpha''(1)\|}{\|\alpha'(1)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{9}$$

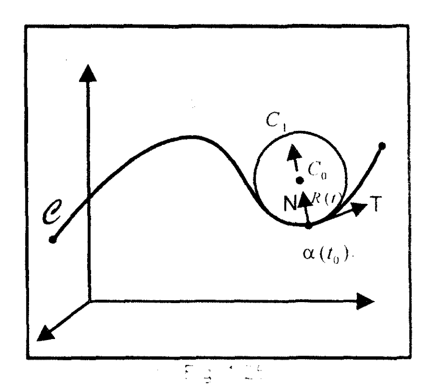
RADIO DE CURVATURA

Definición 20. Sea $\mathcal{C}: \alpha: I \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, y sea $k(t)$ la curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t)$ donde $k(t) \neq 0, \forall t \in I$.

El radio de curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t)$ es dado por

$$\boxed{R(t) = \frac{1}{k(t)}}$$

Observación 12. A la circunferencia que tiene como radio $R(t)$ (Fig. 1.25) se denomina circunferencia de curvatura o círculo de curvatura en el punto $\alpha(t_0)$ de la curva $\mathcal{C}$ con $k(t) \neq 0$.



El centro de la circunferencia de curvatura se encuentra sobre la recta normal a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t_0)$. (Fig. 1.25), y como los vectores T y N están en el plano osculador, entonces la circunferencia de curvatura se encuentra también sobre el plano osculador.

La circunferencia de curvatura (C_1) está en el lado cóncavo o interior de la curva $\mathcal{C}$ y tiene la misma curvatura que $\mathcal{C}$ en $\alpha(t_0)$.

El centro de curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t_0)$ es el centro de la circunferencia de curvatura (C_1) y es dado por

$$C_0(t_0) = \alpha(t_0) + R(t_0)N(t_0)$$

Observación 13. Sea $\mathcal{C}: y = f(x)$ una curva plana, tal que $f'(x)$ y $f''(x)$ existen en $x = a$. Entonces, el centro de curvatura $C_0(x_0; y_0)$ de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $(a; f(a))$ está dado por

$$x_0 = a - f'(a)\left[\frac{1 + (f(a))^2}{f''(a)}\right], \qquad y_0 = f(a) + \left[\frac{1 + (f(a))^2}{f''(a)}\right]$$

Definición 21. (EVOLUTA DE UNA CURVA) La evoluta es el lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva $\mathcal{C}$.

La ecuación vectorial de la evoluta de la curva $\alpha(t)$ es dado por

$$E(t) = \alpha(t) + R(t)N(t)$$

Observación 14. Si $\mathcal{C}: y = f(x)$ es una curva plana, entonces la ecuación cartesiana de la evoluta se obtiene de la siguiente manera:

i) Se determinan las coordenadas del centro de curvatura $C_0(x_0; y_0)$ en forma general.

ii) De las expresiones obtenidas en i), despejar x e y en términos de x_0 y y_0.

iii) Sustituir en la ecuación de la curva las expresiones de x e y obtenidos en ii).

iv) En la ecuación resultante que está en términos de x_0 y y_0, sustituir x_0 por x y y_0 por y; así, la ecuación resultante será la ecuación cartesiana de la evoluta.

Ejemplo 42. Dada la curva $\mathcal{C}: \alpha(t) = \left(\frac{1 - 2t}{2}; \int_{2\pi}^{t} e^{sen\,(u)}du; t\right)$

Halle la ecuación de la circunferencia de curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto donde $\mathcal{C}$ corta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$

Solución

Como la curva $\mathcal{C}$ interseca al plano dado, entonces las componentes de la función vectorial $\alpha(t)$ satisface la ecuación del plano, esto es,

$$\frac{1 - 2t}{2} + \int_{2\pi}^{t} e^{sen\,(u)}du + t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_{2\pi}^{t} e^{sen\,(u)}du = 0 \Leftrightarrow t = 2\pi$$

Luego, la curva $\mathcal{C}$ corta al plano dado en el punto $\alpha(2\pi) = P_0\left(\frac{1 - 4\pi}{2}; 0; 2\pi\right)$

Por otro lado, se tiene

$$\alpha'(t) = (-1;\ e^{sen\,t}; 1) \text{ y } \alpha''(2\pi) = (-1; 1; 1)$$

$$\alpha''(t) = (0;\ e^{sen\,t}\cos t\,;0) \text{ y } \alpha''(2\pi) = (0;1;0)$$

$$\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi) = (-1;0;\ -1)$$

$$[\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)] \times \alpha'(2\pi) = (1;2;\ -1)$$

$$N(2\pi) = \frac{[\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)] \times \alpha'(2\pi)}{\|[\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)] \times \alpha'(2\pi)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1;2;\ -1)$$

$$R(2\pi) = \frac{\|\alpha'(2\pi)\|^3}{\|\alpha'(2\pi) \times \alpha''(2\pi)\|} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \quad \text{(radio de curvatura)}$$

Así, el centro de curvatura de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(2\pi)$ es

$$C_0(2\pi) = \alpha(2\pi) + R(2\pi)N(2\pi)$$

$$= \left(\frac{1-4\pi}{2};0;2\pi\right) + \frac{3\sqrt{6}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{6}}(1;2;-1)\right] = \left(2-2\pi;3;\frac{4\pi-3}{2}\right)$$

La ecuación del plano osculador de la curva $\mathcal{C}$ que pasa por el punto $\alpha(2\pi)$ es

$$P_o: \left[(x;y;z) - \left(\frac{1-4\pi}{2};0;2\pi\right)\right] \bullet (-1;0;-1) = 0 \Leftrightarrow P_o: x+z = \frac{1}{2}$$

Como las coordenadas del centro de curvatura satisfacen la ecuación del plano osculador, entonces la circunferencia de curvatura se encuentra sobre el plano osculador.

Ejemplo 43. Dada la curva $C: \alpha(t) = (2t^2;1-t;3+2t^2)$
Halle la ecuación de la recta paralela al vector curvatura $K(t)$ que pasa por el punto $\alpha(t_0)$, donde el radio de curvatura es mínimo.

Solución

$$\alpha'(t) = (4t;-1;4t), \alpha''(t) = (4;0;4),$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4t & -1 & 4t \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-4;0;4)$$

Luego.

$$R(t_0) = \frac{\|\alpha'(t_0)\|^3}{\|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)\|} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1+32t_0^2)^{3/2}, R'(t_0) = \frac{24}{\sqrt{2}}t_0(32t_0^2+1)^{1/2}$$

Al igualar a cero la derivada de R, el único punto crítico de R es $t_0 = 0$.
Por el criterio de la primera derivada, se tiene

Intervalo	Signo de $R'(t_0)$	$R(t_0)$
$\langle -\infty; 0\rangle$	$-$	decrece — Min
$\langle 0; +\infty\rangle$	$+$	crece

Así, el radio de curvatura es mínimo en $t_0 = 0$.
Ahora,

$$[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \times \alpha'(0) = (4; 0; 4)$$

$$N(0) = \frac{[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \times \alpha'(0)}{\|[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \times \alpha'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1)$$

$$k(0) = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = 4\sqrt{2}\,, \quad K(0) = k(0)N(0) = (4; 0; 4)$$

Por consiguiente, la ecuación vectorial de la recta paralela al vector $K(0)$ que pasa por el punto $\alpha(0) = (0; 1; 3)$ es

$$L: (x; y; z) = (0; 1; 3) + t(4; 0{,}4), t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 44. Halle la ecuación cartesiana de la evoluta de la parábola $y = x^2$
Solución

$$y' = f'(x) = 2x\,, \quad y'' = f''(x) = 2$$

Luego, el centro de curvatura $(x_0; y_0)$ de la curva plana dada es

$$x_0 = x - 2x\left[\frac{1 + 4x^2}{2}\right] = -4x^3$$

$$y_0 = x^2 + \left[\frac{1 + 4x^2}{2}\right] = \frac{6x^2 + 1}{2}$$

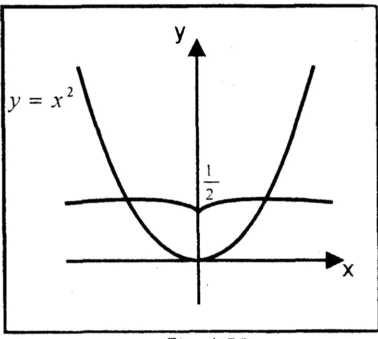


Fig. 1.26

Al despejar x e y en términos de x_0 y y_0, se tiene

$$x = -\left(\frac{x_0}{4}\right)^{1/3}\,, \quad y = \frac{2y_0 - 1}{6}$$

Al reemplazar estas expresiones en la ecuación de la parábola, se obtiene

$$x_o^2 = \frac{16}{27}\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^3$$

Por tanto, la ecuación de la evoluta se obtiene al reemplazar x_0 y y_0 por x e y, esto es

$$E: x^2 = \frac{16}{27}\left(y - \frac{1}{2}\right)^3$$

TORSIÓN

Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular parametrizada por longitud de arco, tal que $\alpha([a; b]) = \mathcal{C}$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t); \alpha_2(t); \alpha_3(t)) \text{ y } s = l(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du \,, t \in [a; b]$$

La razón de cambio instantáneo del vector binormal con respecto al parámetro longitud de arco $s, \frac{dB}{ds}$, determina el grado de torsión de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t)$.

Para los vectores unitarios, se tiene

$$B(t) = T(t) \times N(t), \;\; B'(t) = T(t) \times N'(t)$$

$$N(t) \times B'(t) = N(t) \times [T(t) \times N'(t)]$$

$$= [N(t) \bullet N'(t)]T(t) - [N(t) \bullet T(t)]N'(t) = \vec{0}$$

Luego, los vectores $N(t)$ y $B'(t)$ son paralelos.
Al derivar el vector binormal con respecto al parámetro longitud de arco, se obtiene

$$\frac{dB(t)}{ds} = \frac{dB(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \cdot \frac{dB(t)}{dt} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} B'(t)$$

Como los vectores $N(t)$ y $B'(t)$ son paralelos, entonces se tiene

$$\frac{dB(t)}{ds} = \tau(t) N(t)$$

Donde $\tau(t)$ es una función real. Al número real $\tau(t)$ se llama torsión de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(t)$.

Observación 15.

i) $\tau(t) = 0 \,, \forall t \in I$ si y solo si $\mathcal{C}$ es una curva plana

ii) La torsión $\tau(t)$ mide como se está torciendo la curva $\mathcal{C}$ con relación al plano osculador.

iii) Si $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular parametrizada, tal que $\alpha'(t), \alpha''(t)$ y $\alpha'''(t)$ existen en $[a; b]$, entonces se tiene

$$\boxed{\tau(t) = \frac{[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \bullet \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}}$$

Ejemplo 45. Halle la torsión de la curva $C: \alpha(t) = (\cos t\,; sen\ t\,; t)$ en $t = 0$

Solución

$\alpha'(t) = (-sen\ t; \cos t\,; 1)$, $\alpha''(t) = (-\cos t\,; -sen\ t; 0)$

$\alpha'''(t) = (sen\ t; -\cos t\,; 0)$, $\alpha'(0) = (0; 1; 1)$, $\alpha''(0) = (-1; 0; 0)$

$\alpha'''(0) = (0; -1; 0)$, $\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (0; -1; 1)$

Por tanto, la torsión de la curva dada en el punto correspondiente a $t = 0$ es

$$\tau(0) = \frac{[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \bullet \alpha'''(0)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 46. Sea $\mathcal{C}$ una curva dada por $\alpha(t) = \left(\frac{2t+1}{t-1}; \frac{t^2}{t-1}; t+2\right)$

a) Halle la torsión de la curva $\mathcal{C}$ $\forall t \neq 1$

b) Halle la ecuación del plano osculador en la que se encuentra la curva dada $\forall t \neq 1$.

Solución

a) $\alpha'(t) = \left(-\frac{3}{(t-1)^2}; \frac{t^2-2t}{(t-1)^2}; 1\right)$, $\alpha''(t) = \left(\frac{6}{(t-1)^3}; \frac{2}{(t-1)^3}; 0\right)$

$\alpha'''(t) = \left(-\frac{18}{(t-1)^4}; -\frac{6}{(t-1)^4}; 0\right)$, $[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \bullet \alpha'''(t) = 0$, $\forall t \neq 1$

Luego,

$$\tau(t) = \frac{[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \bullet \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2} = 0\,, \forall t \neq 1$$

Por tanto, la curva $\mathcal{C}$ es plana para todo $t \neq 1$

b) Es fácil verificar que

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \frac{2}{(t-1)^3}(-1; 3; -3),\ \ B(t) = \frac{|t-1|}{\sqrt{19}(t-1)}(-1; 3; -3)$$

Por consiguiente, la ecuación del plano oscular en la que se encuentra la curva dada, $\forall t \neq 1$ es

$$P_0: \left[(x; y; z) - \left(\frac{2t+1}{t-1}; \frac{t^2}{t-1}; t+2\right)\right] \bullet (-1; 3; -3) = 0 \text{, esto es}$$

$$P_0: x - 3y + 3z - 5 = 0$$

Ejemplo 47. Dada la curva $\mathcal{C}$: $\alpha(t) = \left(t - sen\, t; 1 - \cos t\,; 4\, sen\, \left(\frac{t}{2}\right)\right)$, halle la curvatura y la torsión de la curva $\mathcal{C}$ en el punto donde el plano normal principal a la curva es paralelo al plano $z = 1$.

Solución

Como el plano $z = 1$ es paralelo al plano normal principal, entonces sus vectores normales $\vec{k} = (0; 0; 1)$ y $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$ son paralelos. Luego, se tiene

$$\vec{k} \times \alpha'(t) = (-sen\, t; 1 - \cos t\,; 0) = (0; 0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} sen\, t = 0 \\ 1 - \cos t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

También, se tiene

$$\alpha''(t) = \left(sen\, t; \cos t\,; -sen\, \left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad \alpha'''(t) = \left(\cos t\,; -sen\, t; -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$\alpha'(0) = (0; 0; 2), \quad \alpha''(0) = (0; 1; 0), \quad \alpha'''(0) = \left(1; 0; -\frac{1}{2}\right) \text{ y}$$

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (-2; 0; 0)$$

Por consiguiente, la curvatura y la torsión de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(0) = (0; 0; 0)$ son

$$k(0) = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{1}{4}$$

$$\tau(0) = \frac{[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \bullet \alpha'''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|^2} = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 48. Determine la ecuación del plano osculador y la torsión para la curva

$$\mathcal{C}: \alpha(t) = \left(\arctan t\,; -\frac{1}{1+t}; \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$$

en un punto donde el vector tangente a la curva tiene la dirección de la recta

$$L: x + 1 = y - 1 = z - 2$$

Solución

Como $\alpha'(t) = \left(\dfrac{1}{1+t^2}; \dfrac{1}{(1+t)^2}; \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ es paralelo a la recta $L: (x; y; z) = (-1; 1; 2) + s(1; 1; 1), s \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha'(t) \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{1}{1+t^2} & \dfrac{1}{(1+t)^2} & \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; -\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)$$

$$= (0; 0; 0)$$

De donde resulta $t = 0$

También se tiene

$$\alpha(0) = (0; -1; 0)\ ,\ \alpha'(0) = (1; 1; 1)$$

$$\alpha''(t) = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}; -\frac{2}{(1+t)^3}; -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\right),\quad \alpha''(0) = (0; -2; 0)$$

$$\alpha'''(t) = \left(\frac{-2+6t^2}{(1+t^2)^3}; \frac{6}{(1+t)^4}; \frac{2t^2-1}{(1+t^2)^{5/2}}\right),\quad \alpha'''(0) = (-2; 6; -1)$$

$$\alpha'(0) \times \alpha''(0) = (2; 0; -2)$$

Luego, la ecuación del plano osculador de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(0) = (0; -1; 0)$ es

$$P_0: [(x; y; z) - (0; -1; 0)] \bullet (2; 0; -2) = 0 \Leftrightarrow P_0: x - z = 0$$

La torsión de la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(0) = (0; -1; 0)$ es

$$\tau(0) = \frac{[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \bullet \alpha'''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|^2} = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 49. Dada la curva

$$\mathcal{C}: \begin{cases} xz - 3x - 2z + 3 = 0 \\ z^2 - yz + 3y - 4z + 4 = 0 \end{cases}$$

Calcule su torsión en el punto en que la curva atraviesa el plano XY.

Solución

Al hacer $z = 0$ en las ecuaciones de las superficies que generan $\mathcal{C}$, se obtiene

$$\begin{cases} -3x + 3 = 0 & \dots \quad (1) \\ 3y + 4 = 0 & \dots \quad (2) \end{cases}$$

Al resolver (1) y (2), se obtiene $x = 1\ , y = -\dfrac{4}{3}$

Luego, la curva interseca al plano XY en el punto $P_0\left(1; -\dfrac{4}{3}; 0\right)$

Al despejar x en la ecuación de la primera superficie e y en la ecuación de la segunda superficie, resulta

$$x = \frac{2z-3}{z-3}\,,\; y = \frac{z^2-4z+4}{z-3}$$

Al definir $z = t$, se obtiene la ecuación vectorial de la curva $\mathcal{C}$, esto es

$$\alpha(t) = \left(\frac{2t-3}{t-3}; \frac{t^2-4t+4}{t-3}; t\right) \text{ y } \alpha(0) = \left(1; -\frac{4}{3}; 0\right)$$

De la función vectorial $\alpha(t)$, se obtiene

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{3}{(t-3)^2}; \frac{t^2-6t+8}{(t-3)^2}; 1\right), \quad \alpha'(0) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{9}; 1\right)$$

$$\alpha''(t) = \left(\frac{6}{(t-3)^3}; \frac{2}{(t-3)^3}; 0\right), \qquad \alpha''(0) = \left(-\frac{6}{27}; -\frac{2}{27}; 0\right)$$

$$\alpha'''(t) = \left(-\frac{18}{(t-3)^4}; -\frac{6}{(t-3)^4}; 0\right), \qquad \alpha'''(0) = \left(-\frac{6}{27}; -\frac{2}{27}; 0\right)$$

$$\alpha'(0) \times \alpha''(t) = \left(\frac{2}{27}; -\frac{6}{27}; \frac{6}{27}\right)$$

Por tanto, la torsión de la curva $\mathcal{C}$ en el punto correspondiente a $t = 0$ es

$$\tau(0) = \frac{[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \bullet \alpha'''(0)}{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|^2} = 0$$

COMPONENTE NORMAL Y TANGENCIAL DE LA ACELERACIÓN

Sea $\mathcal{C}$ una curva regular en $\mathbb{R}^3$, esto es, existe una función vectorial

$$\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \alpha([a; b]) = \mathcal{C}$$

Sea $\alpha(t) = (\alpha_1(t); \alpha_2(t); \alpha_3(t))$ el vector posición de una partícula P que se mueve en el espacio, donde t es el tiempo. Entonces $\mathcal{C}$ representa la trayectoria de la partícula.

Luego, el vector velocidad de la partícula en cualquier punto $\alpha(t) = Q \in \mathcal{C}$ es dado por

$$v(t) = \alpha'(t) = l'(t)T(t) = \|\alpha'(t)\|T(t)$$

donde T es el vector tangente unitario y l es la función longitud de arco.

De la observación 8, el vector aceleración es dado por

$$a(t) = v'(t) = l''(t)T(t) + l'(t)T'(t) = \alpha''(t)$$

$$a(t) = l''(t)T(t) + k(t)[l'(t)]^2 N(t)$$

Definición 22. El coeficiente de $T(t)$ se llama componente tangencial de la aceleración y se denota por

$$\boxed{a_T(t) = l''(t)}$$

El coeficiente de N(t) se llama componente normal del vector aceleración y se denota por

$$\boxed{a_N(t) = k(t)[l'(t)]^2}$$

La rapidez de la partícula en un instante t es

$$\|v(t)\| = l'(t)$$

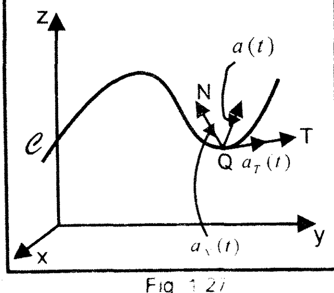


Fig 1.27

La componente tangencial de la aceleración es la razón de cambio del módulo de la velocidad de la partícula.
La componente normal de la aceleración es siempre positiva.
Además vemos que si el módulo de la velocidad es constante, entonces la componente normal aumenta al aumentar la curvatura.
Esto explica por qué un automóvil que toma una curva cerrada a velocidad moderada o a una curva suave a gran velocidad exige, en ambos casos, una fuerza normal (rozamiento de los neumáticos) de gran magnitud para que el vehículo no se salga de la carretera.

Ejemplo 50. Una partícula se mueve según la ley

$$\alpha(t) = (t;\ \ln(\sec t + \tan t)\,;\ \ln(\sec t))$$

Halle sus vectores velocidad y aceleración, su velocidad escalar, los vectores unitarios T y N, y los componentes normal y tangencial del vector aceleración. todo para $t = \pi/3$.

Solución

$$v(t) = \alpha'(t) = (1; \sec t\,; \tan t), \qquad v\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1; 2; \sqrt{3}\right) = v$$

$$a(t) = \alpha''(t) = (0; \sec t \tan t\,;\ sec^2 t), \qquad a\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(0; 2\sqrt{3}; 4\right) = a$$

$$l'(t) = \|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}\sec t\ , \qquad l'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$l''(t) = \sqrt{2}\sec t \tan t\ , \qquad l''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{6}$$

La velocidad escalar, el vector tangente unitario y la curvatura en $t = \pi/3$ son

$$v = l'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$T\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\alpha'(\frac{\pi}{3})}{\left\|\alpha'(\frac{\pi}{3})\right\|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1;2;\sqrt{3}) = T$$

$$k\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left\|\alpha'(\frac{\pi}{3}) \times \alpha''(\frac{\pi}{3})\right\|}{\left\|\alpha'(\frac{\pi}{3})\right\|^3} = \frac{1}{4} = k$$

Como $a = l''\left(\frac{\pi}{3}\right)T + k\left[l'(\frac{\pi}{3})\right]^2 N$, entonces $N = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0;\frac{1}{2}\right)$ y

$$a_T\left(\frac{\pi}{3}\right) = l''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{6}, \qquad a_N\left(\frac{\pi}{3}\right) = k\left[l'(\frac{\pi}{3})\right]^2 = 2$$

EJERCICIOS

1.- En los siguientes ejercicios halle los vectores unitarios T, N y B.

a) $\alpha(t) = (1+t; 3-t; 2t+4)$ b) $\alpha(t) = (e^{-2t}; e^{2t}; 1+t^2)$

c) $\alpha(t) = (e^t\, sen\, t; e^{2t}\cos t; e^{-t})$ d) $\alpha(t) = \left(\frac{t}{1+t}; \frac{t^2}{1+t}; \frac{1-t}{1+t}\right)$

2.- Sea $\mathcal{C}$ una curva de ecuación vectorial

$C: \alpha(t) = (t; \ln(\sec t); \ln(\sec t + \tan t))$

Halle los vectores T, N y B y la ecuación del plano osculador en el punto en que la curva corta al plano YZ.

$R.\ T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;1),\ N = (0;1;0),\ B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ P_o: x - z = 0$

3.- En los siguientes ejercicios, halle para el valor particular dado t, los vectores T, N y B; la curvatura, las ecuaciones de la recta tangente y la ecuación del plano osculador a las curvas

a) $\alpha(t) = (e^t\cos t; e^t\, sen\, t; e^t), t = 0$ $R.\ P_o: x + y - 2z + 1 = 0; k = \frac{\sqrt{2}}{3}$

b) $\alpha(t) = \left(2\cosh\left(\frac{t}{2}\right); 2\, senh\left(\frac{t}{2}\right); 2t\right), t = 0$ $R.\ P_o: 2y - z = 0; k = \frac{1}{10}$

4.- Sea $\mathcal{C}$ una curva de ecuación vectorial $\alpha(t) = \left(2t; \frac{t^2}{\sqrt{2}}; \frac{t^3}{3}\right)$

a) Halle el centro de la circunferencia de curvatura en $\alpha(0)$. R. $\left(0; 2\sqrt{2}; 0\right)$

b) ¿Cuál de los siguientes puntos

$P_1\left(0; \sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $P_2\left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 0\right)$, $P_3(\sqrt{2}; 0; 0)$

pertenece a la circunferencia de la curvatura? R. P_2

5.- Si $\mathcal{C}$ tiene la representación paramétrica

$$\alpha(t) = \left(\cos t\,; sen\ t; \left\|\frac{2t}{\pi}\right\|\right), t \in [0; 4\pi]$$

Determine todos los puntos en donde $\mathcal{C}$ tiene un vector tangente paralelo a uno de los planos coordenados.

6.- Si $\mathcal{C}$ es una curva con representación paramétrica

$$\alpha(t) = \left(t; \frac{1+t}{t}; \frac{1-t^2}{t}\right)$$

a) Calcule su torsión R. $\tau = 0$

b) Determine la ecuación del plano osculador en el punto en que $t = 1$

R. $P_O: x - y + z + 1 = 0$

c) ¿Sería distinta la ecuación del plano osculador en otro punto? Justifique su respuesta. R. Es el mismo.

7.- Sea $\mathcal{C}$ una curva con representación paramétrica

$$\alpha(t) = \left(2 - t^{1/2}; t^{1/2}; |t^2 - 1|\right)$$

Halle su torsión en el punto de intersección de la curva con el plano $x + y + z = 5$ R. $\tau = 0$

8.- Dada la curva parametrizada por $\alpha(t) = \left(1 - 2t; t^2; 2e^{2(t-1)}\right)$

Halle la ecuación del plano que contiene a la circunferencia de curvatura de la curva en el punto donde $\alpha'(t)$ es paralelo a $\alpha(t)$. Determine también si el punto $(3; 2; 14)$ está en dicho plano. R. $P_O: 2x + 4y - z = 0$

9.- Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección de las superficies $y^2 = x$, $x^2 = z$. En el punto $(1;1;1)$, halle los vectores unitarios T, N y B; ecuación del plano osculador, plano normal y del plano rectificante.

10.- Sea C una curva parametrizada

$$\alpha(t) = (a(\cos t + t\ sen\ t); a(sen\ t - t\cos t); t^2), t \geq 0$$

Reparametrizar la curva con respecto a la longitud de arco como parámetro.

11.- Dada la curva parametrizada por $\alpha(t) = (3t^2; 5 - t; 5 + 3t^2)$
Halle la ecuación de la recta paralela al vector curvatura y que pasa por el punto $\alpha(t_1)$ en donde el radio de curvatura es mínima.

R. $L = \{(0; 5; 5) + \lambda(1; 0; 1) \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$

12.- Halle la distancia que recorre una partícula que se desplaza sobre la curva
$C: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge x + z = 1$
desde el punto $A(1; 0; 0)$ hasta el punto $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ $\quad R.\ \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

13.- Dada la curva parametrizada por
$\alpha(\theta) = (\theta - sen\,\theta; 1 - \cos\theta),\ \ 0 < \theta < 2\pi$
y sea L la recta que pasa por el centro de la circunferencia de curvatura de la curva en $\theta = \pi/3$, en la dirección del vector curvatura.
Halle la intersección de L con el eje X. $\quad R.\ \left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$

14.- Dada la curva $C: x^2 - 2yz = 0 \wedge y + z - \sqrt{2}x - 1 = 0$
a) Halle la ecuación del plano osculador en el punto $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$
b) Halle la curvatura y la torsión en dicho punto.

15.- Dada la curva parametrizada por $\alpha(t) = \left(\frac{1-2t}{2}; \int_0^t e^{sen\,u}du\,; t\right)$
Halle la circunferencia de curvatura de $\mathcal{C}$ en el punto donde la curva intersecta al plano $x + y + z = \frac{1}{2}$. $\quad$ R. Centro: $\left(2; 3; -\frac{3}{2}\right)$, Radio: $\frac{3}{2}\sqrt{6}$

16.- Halle el radio de curvatura de la curva $\alpha(t) = (3t - t^3; 3t^2; 3t + t^3)$ en el punto $(-2; 12; 14)$.

17.- Halle la torsión de la curva $\alpha(t) = (1 + t; e^{t+1}; t^2 + 1)$ $(t \geq 0)$ en el punto de intersección con la curva $\beta(t) = \left(\frac{3}{1+t}; e^{4t}; 1 + 2t\right), t \geq 0$

$R.\ \tau = -\frac{2e^2}{e^4 + 4}$

18.- Si $\mathscr{C}$ es una curva en $\mathbb{R}^3$ descrita por

$$\alpha(t) = \left(t - sen\, t; 1 - \cos t; -4\cos\frac{t}{2}\right), t \in [0; 2\pi]$$

Halle la longitud de arco de $\mathscr{C}$ entre el punto de curvatura máxima y el punto de curvatura mínima. R. $L = 4\sqrt{2}$

19.- Demuestre que la hélice descrita por $\alpha(t) = (a\cos wt; a\, sen\, wt; bwt)$ tiene curvatura constante $k = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$

20.- Un punto se mueve en el espacio según trayectoria

$$\alpha(t) = (4\cos t; 4\, sen\, t; 4\cos t)$$

a) Pruebe que la trayectoria es una elipse y halle la ecuación del plano que contiene dicha elipse.

b) Pruebe que el radio de curvatura es $2\sqrt{2}(1 + sen^2 t)^{3/2}$

21.- Para la curva cuya ecuación vectorial es $\alpha(t) = \left(e^t; e^{-t}; \sqrt{2}t\right)$, demuestre que la curvatura es $k(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{(e^t + e^{-t})^2}$

22.- Calcule el radio de curvatura de las siguientes ecuaciones polares:

a) $r = \theta$, $R.\ \dfrac{(\theta^2 + 1)^{3/2}}{\theta^2 + 2}$ b) $r = e^\theta$, $R.\ \sqrt{2}e^\theta$

c) $r = 1 + \cos\theta$ en $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $R.\ \dfrac{2}{3}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

23.- Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante $t = 2$ para el movimiento de una partícula, descrito por la curva

$$\alpha(t) = \left(\ln(t^2 + 1); 2\arctan t; 2\sqrt{t^2 + 1}\right) \quad R.\ a_T = 0,\ a_N = \frac{12}{5\sqrt{30}}$$

24.- Encuéntrese la trayectoria $\alpha = \alpha(t)$ de una partícula dado que $\alpha(0) = (0; 0; 1600)$, $\alpha'(t) = (500; 1000; -32t)$. ¿Qué distancia recorre la partícula comenzando en el instante $t = 0$ antes de tocar el plano XY? Proporcione fórmulas para las componentes normal y tangencial de la aceleración. ¿Cuál es el radio de curvatura de la trayectoria cuando $t = 5$?

R. $\alpha(t) = (500; 1000t; -16t^2 + 1600), d = 11284\ \ R(5) = 40950$

25.- Una partícula se desplaza sobre la curva C_1, descrita por

$\alpha(t) = \left(\frac{2}{3}(2t+4)^{3/2}; 4-2t; t^2+4t\right)$, con una rapidez constante de 4 m/seg

Si la partícula parte del reposo del punto $(0; 8; -4)$

a) Halle el vector velocidad y las componentes tangencial y normal de la aceleración en el instante en que cruza a la curva C_2, descrito por

$\beta(t) = \left(\frac{4}{3}+t^2; 2t; 20-10t\right)$ $\quad R.\ a_T = 0, \quad a_N = \frac{4}{3}$

b) Desde que la partícula parte del reposo, ¿cuánto demora hasta cruzar C_2?

R. $t = 2\,seg$

26.- Dos partículas se mueven de acuerdo a los vectores posición

$\alpha(t) = (1+t; 2+3t)$ y $\beta(t) = (1-t; 3-t^3)$

respectivamente, donde t es el parámetro, partiendo de $t = 0$

a) ¿Colisionan las partículas una a otra? En caso que sea así ¿en qué punto?

b) Halle las ecuaciones de las rectas normales a ambas trayectorias en el punto donde estos sean paralelos. R. $L = \{P\ /\ P = (0;2) + t(-3;1), t \in \mathbb{R}\}$

27.- Sea $\mathcal{C}$ una curva descrita por la función vectorial

$\alpha(t) = (a^2\cos t; a^2 sen\ t; b^2 t)$ con a y b constantes. Determine la curvatura, radio de curvatura y torsión en cualquier punto.

28.- Sea S el sólido encerrado por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ y por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ y $\mathcal{C}$ la curva de intersección de ambas superficies. Halle la longitud y la curvatura de $\mathcal{C}$.

29.- Sea C la curva descrita por $f(t) = (2t^2; 1-t; 3+2t^2)$ y P_0 el centro de curvatura de C en el punto donde la curvatura es máxima. Halle la ecuación de la recta que pasa por P_0 paralela al vector curvatura.

30.- Sea $\mathcal{C}$ la curva descrita por $\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t; 1 - sen\ t; -\frac{3}{5}\cos t\right)$, $t > 0$

Demuestre que $\mathcal{C}$ es una circunferencia y encuentre su centro y radio.

31.- Sea la curva $\mathcal{C}$ descrita por $\alpha(t) = \left(\ln(t+\sqrt{1+t^2}); \frac{t}{1+t}; \ln(1+t)\right)$

Halle la ecuación del plano osculador y la torsión para la curva $\mathcal{C}$ en un punto donde el vector tangente tiene la dirección de la recta $x-1 = y-2 = z-5$.

32.- Sea la curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$ descrita por $\alpha(t), t \in D_\alpha$. Halle el centro de curvatura de $\mathcal{C}$, en el punto $\alpha(1) = (3;1;3)$, si se cumple que el plano osculador en dicho punto es $3y - x = 0$,

$$\alpha''(t) = \frac{20t}{\sqrt{10t^2+1}}T(t) + \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10t^2+1}}N(t),\ \alpha(1) \bullet N(1) > 0 \text{ y } \alpha'(1) = (6;2;2)$$

$$R.\ \left(-\frac{18}{5}; -\frac{6}{5}; 25\right)$$

33.- Halle las coordenadas del centro de curvatura de la curva C_1 descrita por $\alpha(t) = (t^3+6; 3t+4; t^2)$ en un punto de intersección con la curva C_2 descrita por $\beta(t) = (t^2-3; 3t-5; \ln(e^{4t}+t-1))$

34.- Halle la ecuación del plano osculador a la curva C descrita por

$$\alpha(t) = \left(t; \frac{t^2}{2}; \frac{t^3}{3}\right) \text{ para } t = 2.$$

35.- Una partícula se mueve en el plano a lo largo de la espiral $r = e^\theta$ con una rapidez constante de 5 pies/seg.

a) Calcule el vector velocidad y las componentes de la aceleración de la partícula cuando $\theta = \pi/4$.

$$R.\ v\left(\frac{\pi}{4}\right) = (0;5), \qquad a_T = 0, \qquad a_N = \frac{25}{2}\sqrt{2}\, e^{-\pi/4}$$

b) ¿Cuánto tardará la partícula en ir desde el punto correspondiente a $\theta = 0$ hasta el punto correspondiente a $\theta = \pi$?

$$R.\ t = \frac{\sqrt{2}}{5}(e^\pi - 1)$$

c) Si $\theta = 0$ cuando $t = 0$, halle la función vectorial que describa la trayectoria de la partícula.

$$R.\ \alpha(t) = \left(\left(\frac{5}{\sqrt{2}}t+1\right)\left(\cos\ln\left(\frac{5}{\sqrt{2}}t+1\right)\right); sen\ \left(\ln\left(\frac{5}{\sqrt{2}}t+1\right)\right)\right)$$

36.- Halle la curvatura $k(\pi)$ y la torsión $\tau(\pi)$ para la curva $\mathcal{C}$ descrita por

$$\alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos s; 1 - sen\ s; -\frac{3}{5}\cos s\right) \text{ siendo } s \text{ la longitud de arco de la curva } \mathcal{C}.$$

¿Sobre que superficie se encuentra la curva $\mathcal{C}$?

R. $k(\pi) = 1$, $\tau(\pi) = 0$, $3x + 4z = 0$

37.- Halle el centro de la circunferencia de curvatura y el plano osculador de la curva $C: \alpha(t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ en $\alpha(0) = (0; 0; 1)$, si se sabe que:

$\alpha'(0) = (0; 0; 2), T'(l) = \frac{2}{9}(2; 1; -2), T'(t)$ es paralelo a $\left(-t; \frac{t^2}{2} - 1; t\right)$ y

$\alpha''(t) = 2tT(t) + 2N(t)$

$R.\ (0; 2; 1), x = 0.$

38.- Halle y grafique el círculo de curvatura y una porción de la curva $\mathcal{C}$ descrita por: $\alpha(t) = (t\, sen\, t + \cos t\,; sen\, t - t \cos t), t > 0$ en un punto en donde el vector tangente es paralelo al eje X.

39.- La curva $\mathcal{C}$ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$ con el plano $x - y - 2z - 2 = 0$. Halle la curvatura, torsión y el plano osculador en el punto $(3; -1; 1)$.

40.- Una partícula se desplaza en el plano $\mathbb{R}^2$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ de ecuación $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,, x \geq 1$ con rapidez constante $(\sqrt{3}/2)\ m/\ seg.$ y parte del punto $(1; 0)$ en el instante $t = 0$. Halle la ecuación del círculo de curvatura de $\mathcal{C}$ en el punto en que se encuentra la partícula después de haber transcurrido 2 seg desde su partida.

$$R.\ (x - 4)^2 + \left(y + \frac{2}{\sqrt{3}} - \ln(2 + \sqrt{3})\right)^2 = 16$$

41.- Sea C_1 la curva descrita por la función

$\alpha(t) = (1 + t; e^{3-t}; \ln(t^2 + 2t + 1) - \ln 4)$ y C_2 la curva descrita por

$\beta(t) = \left(\frac{1}{t}; 4\sqrt{|t|} - 1; -\ln t\right)$. Halle la torsión de la curva C_1 en el punto de intersección de C_1 y C_2.

42.- Diga si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

a) Sea $\alpha(t) = (\alpha_1(t); \alpha_2(t); \alpha_3(t))$ una función vectorial. Si t es la longitud de arco, entonces los vectores $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ son ortogonales.

b) Si $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3$ es una curva, tal que $\|\alpha'(t)\| = 1$, entonces $\alpha(t)$ es una circunferencia en $\mathbb{R}^3$.

c) La curva $\alpha(t) = (2t^2; 1 - t; 3 + t^2)$ interseca al plano $3x - 14y + z - 10 = 0$ en dos puntos.

R. VFV

2 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES LIMITES Y CONTINUIDAD

2.1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición 1. Una función real de n variables denotada por $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una regla de correspondencia que asigna a cada *n-upla* de números reales $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ de un conjunto D del espacio $\mathbb{R}^n$, un único número real z denotado por

$$z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

Las variables $x_1; x_2; \dots; x_n$ se denominan **variables independientes** de la función. mientras que z se llama **variable dependiente**.

El domino de la función f es el conjunto

$$D_f = D = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \;/\; \exists z \in \mathbb{R} \wedge z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)\} \subset \mathbb{R}^n$$

El rango o recorrido de la función f es el conjunto

$$R_f = \{z \in \mathbb{R} \;/\; \exists (x_1; x_2; \dots; x_n) \in D \wedge f(x_1; x_2; \dots; x_n) = z\} \subset \mathbb{R}$$

Ejemplo 1. Determine el dominio y rango de la función

$$f(x; y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

Solución

El dominio de la función f es el conjunto

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 36 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \leq 36\}$$

Es decir, el dominio es el conjunto de todos los puntos que se encuentran en la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$, o en su interior.

Como $36 - x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq 36 \Leftrightarrow 0 \leq 36 - x^2 - y^2 \leq 36$

$\Leftrightarrow 0 \leq z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \leq \sqrt{36} = 6$, entonces el rango de la función f es el conjunto

$$R_f = \{z \in \mathbb{R} \;/\; 0 \leq z \leq 6\} = [0; 6]$$

Definición 2. Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables reales con dominio D. Se denomina gráfica de la función $z = f(x_1; \dots; x_n)$ al conjunto de todos los puntos $(x_1; x_2; \dots; x_n; z)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ y se escribe

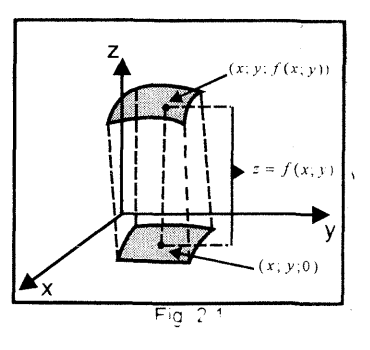


Fig 2.1

$$G_f = \{(x_1; x_2; \dots; x_n; z) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ z = f(x_1; \dots; x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Para el caso $n = 1$ (función de una variable real) la gráfica es una curva, mientras que para $n = 2$ adopta la forma de una superficie en el espacio $\mathbb{R}^3$, siendo $f(x; y)$ la distancia orientada desde $(x; y; 0)$ hasta $(x; y; f(x; y))$ (ver fig. 2.1)
Al referirnos a una función dada por la ecuación $z = f(x_1; \dots; x_n)$, se supone (a menos que se especifique explícitamente alguna restricción adicional) que el dominio está formado por el conjunto de n-uplas $(x_1; \dots; x_n)$ para los cuales z es un número real.

Ejemplo 2. Dado $f(x; y) = 6 + \frac{1}{3}\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

a) Encuentre el dominio y rango de la función.

b) Trace la gráfica de f.

Solución

a) $D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 36 - 9x^2 - 4y^2 \geq 0\} = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$

Luego, el dominio de f es el conjunto de todos los puntos $(x; y)$ que están en la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. o en su interior

El rango de la función f es el conjunto

$$R_f = \left\{z \in \mathbb{R} \ / \ 6 \leq z \leq 6 + \frac{1}{3}\sqrt{36} = 8\right\}$$
$$= [6; 8]$$

b) La gráfica de la función f es la superficie que se muestra en la figura 2.2

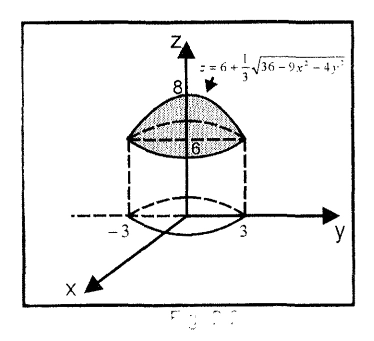


Fig 2.2

Ejemplo 3. Determine analítica y gráficamente el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = \ln(y^2 - x^2) + arcsen(y-2) - \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

b) $g(x;y) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}{\ln(x^2 + y^2 - 4)} + \dfrac{\sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

Solución

a) $D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 - x^2 > 0 \land -1 \leq y - 2 \leq 1 \land 9 - x^2 - y^2 \geq 0\}$

$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 > x^2 \land 1 \leq y \leq 3 \land x^2 + y^2 \leq 9\}$

Luego, el dominio de f es el conjunto de puntos $(x;y)$ que se encuentran entre las rectas $y = -x$ y $y = x$, interior o sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y entre las rectas $y = 1$ y $y = 3$, como se muestra en la figura 2.3 (las líneas punteadas no forman parte del dominio).

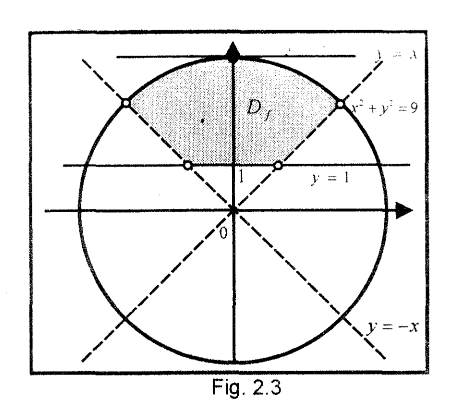


Fig. 2.3

Fig. 2.4

b) $D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 16 - x^2 - y^2 \geq 0 \land x^2 + y^2 - 4 > 0 \land x^2 + y^2 - 4 \neq 1$
$\land \ y^2 - 1 \geq 0 \land x^2 - y^2 > 0\}$
$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 16 \land x^2 + y^2 > 4 \land x^2 + y^2 \neq 5 \land (y \leq -1 \lor y \geq 1) \land x^2 - y^2 > 0\}$

Por consiguiente, el dominio es el conjunto sombreado en la figura 2.4.
Las líneas punteadas no forman parte del dominio.

Ejemplo 4. Si $f(x+y; x-y) = xy + y^2$, halle $f(x;y)$

Solución

Al escoger $u = x + y$ y $v = x - y$, se obtiene $x = \frac{1}{2}(u+v)$ y $y = \frac{1}{2}(u - v)$

Luego, la regla de correspondencia de f en términos de u y v es

$$f(u;v) = \frac{1}{4}(u+v)(u-v) + \frac{1}{4}(u-v)^2 = \frac{1}{2}(u^2 - uv)$$

Por tanto, la regla de correspondencia de f en términos de x e y es

$$f(x;y) = \frac{1}{2}(x^2 - xy)$$

OPERAC<IONES CON FUNCIONES

Sean $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de n variables cuyos dominios son D_f y D_g respectivamente. Entonces se tiene:

a) **Función suma**

$$(f+g)(\underline{x}) = f(\underline{x}) + g(\underline{x}), \quad D_{f+g} = D_f \cap D_g \text{ y } \underline{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$$

b) **Función diferencia**

$$(f-g)(\underline{x}) = f(\underline{x}) - g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

c) **Función producto**

$$(f.g)(\underline{x}) = f(\underline{x}).g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

d) **Función cociente**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})}, \quad \underline{x} \in D_f \cap \left(D_g - \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \,/\, g(\underline{x}) = 0\}\right)$$

Definición 3. Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones cuyos dominios son D_f y D_g respectivamente.

La función compuesta $g \circ f$ es dada por la regla de correspondencia

$$(g \circ f)(\underline{x}) = g(f(\underline{x})) = g(f(x_1; x_2; \dots; x_n))$$

El dominio de la función compuesta $g \circ f$ es

$$D_{g \circ f} = \{\underline{x} \in D_f \,/\, f(\underline{x}) \in D_g\}$$

En la figura 2.5 se muestra la función compuesta $g \circ f$.

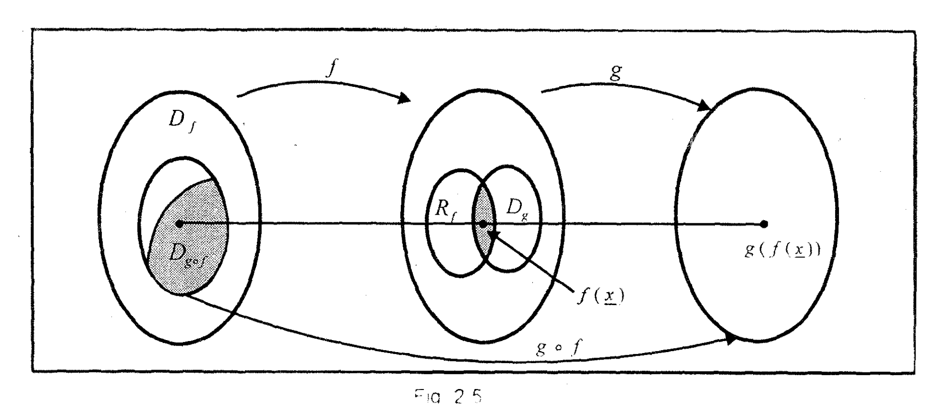


Fig 2.5

Ejemplo 5. Dado $g(x) = \arccos x$ y $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$, encuentre el dominio y la regla de correspondencia de la función $g \circ f$.

Solución

$$D_f = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2-9 \geq 0\},\, D_g = [-1;1]$$

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{(x;y;z) \in D_f \,/\, f(x;y;z) \in D_g\} \\ &= \left\{(x;y;z) \in D_f \,/\, -1 \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2-9} \leq 1\right\} \\ &= \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 9 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 10\} \end{aligned}$$

La regla de correspondencia de la función $g \circ f$ es

$$(g \circ f)(x;y;z) = g(f(x;y;z)) = \arccos\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2-9}\right),\, (x;y;z) \in D_{g\circ f}$$

CURVAS DE NIVEL

Si $z = f(x;y)$ es una función de dos variables y c es una constante real, entonces la gráfica de la ecuación $f(x;y) = c$ es un conjunto de puntos en el espacio $\mathbb{R}^3$ con coordenadas $(x;y;c)$. Todos los puntos tienen la misma cota $z = c$. Luego, todos estos puntos están a la misma altura sobre el plano XY, es decir, están al mismo nivel sobre el plano XY.

Las gráficas de la ecuación $f(x;y) = c$, en el plano XY, se llaman curvas de nivel de la función f.

A la familia de las curvas de nivel de f se denomina mapa de contorno.

Ejemplo 6. Para el paraboloide elíptico $z = f(x;y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$, dibuje un mapa de contorno utilizando curvas de nivel para $c = 1,2,3,4$.

Solución

Para cada $c > 0$, la ecuación $z = f(x;y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 = c$ es una circunferencia con centro en el punto $c_0(1;1)$ y radio $r = \sqrt{c}$.

Así, para $c = 1$, la curva de nivel es $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

La figura 2.6 muestra las cuatro curvas de nivel de f y la figura 2.7 muestra la gráfica del paraboloide elíptico.

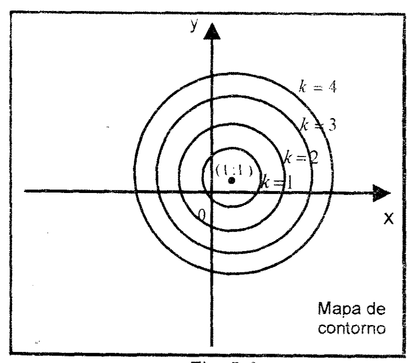


Fig 2.6

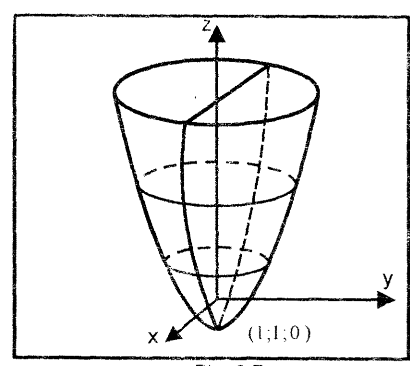


Fig 2.7

SUPERFICIES DE NIVEL

Sea $w = f(x; y; z)$ una función de tres variables con dominio $D \subset \mathbb{R}^3$
Las gráficas de la ecuación $f(x; y; z) = k$ (k constante real), en el espacio $\mathbb{R}^3$, se llaman superficies de nivel de la función f.
A diferencia de las curvas de nivel, las superficies de nivel son normalmente difíciles de dibujar.

Ejemplo 7. Dibuje las superficies de nivel de la función

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2}$$

Solución
Cada ecuación de la superficie de nivel de f tiene por ecuación

$$\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2} = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = k^2$$

Luego, las superficies de nivel de f son elipsoides con centro en el origen de coordenadas. La figura 2.8 muestra las dos superficies de nivel de f.

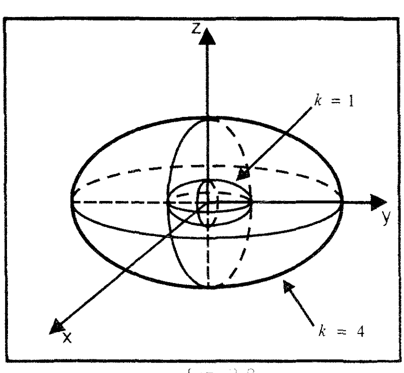


Fig. 2.8

Ejemplo 8. Halle la ecuación de la curva de nivel de la función

$$f(x; y) = y^2 \arctan(x^2)$$

que pasa por el punto $A(1; 4)$
Solución
Para cada valor de la constante c, la ecuación de la curva de nivel de f es

$$y^2 \arctan(x^2) = c$$

Como $A(1; 4)$ es un punto de la curva de nivel, entonces sus coordenadas satisfacen su ecuación, esto es

$$16 \arctan(1) = c \Leftrightarrow c = 16\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\pi$$

Por tanto, la ecuación de la curva de nivel de la función f que pasa por el punto $A(1; 4)$ es

$$c_N: y^2 \arctan(x^2) = 4\pi$$

Ejemplo 9. Una compañía fabrica una caja rectangular cerrada de modo que su volumen sea de 36 m^3. El material para la base y la tapa cuesta S/. 12 el metro cuadrado; para los lados de enfrente y de atrás. S/.10 el metro cuadrado; y los otros dos lados S/. 8 el metro cuadrado.

a) Si C denota el costo total de la caja, determine C en función de las dimensiones de la base de la caja.

b) Calcule el costo total de construir una caja cuyas dimensiones de la base son: largo 2 metros y ancho 3 metros.

Solución

a) Si x e y son las medidas de largo y ancho de la base de la caja, y z la medida de la altura, entonces el volumen es

$$V = xyz$$

Como el volumen de la caja es 36 m^3, entonces

$$V = xyz = 36 \Rightarrow z = \frac{36}{xy}$$

Al utilizar los costos de cada lado por metro cuadrado, se tiene el modelo de costo total

$$C = 12(2xy) + 10(2xz) + 8(2yz) = 24xy + 20xz + 16yz$$

Al reemplazar la expresión de z en el costo total, se obtiene

$$C(x;y) = 24xy + 20x\left(\frac{36}{xy}\right) + 16y\left(\frac{36}{xy}\right) = 24xy + \frac{720}{y} + \frac{576}{x}$$

Por tanto, la función costo total de la caja en términos de las medidas de la base es

$$C(x;y) = 24xy + \frac{720}{y} + \frac{576}{x} \quad (x > 0\,, y > 0)$$

b) El costo total de construir una caja cuyas dimensiones de la base son $x = 2m$ y $y = 3m$ es

$$C(2;3) = 24(6) + \frac{720}{3} + \frac{576}{2} = S/.\ 672$$

Ejemplo 10. La empresa Pallancos S.A. fabrica dos tipos de cinta de casetes de 60 y 90 minutos de duración. El costo por unidad de mano de obra para los dos tipos de casetes es de S/. 2 y de S/. 3 respectivamente. Además, la empresa tiene costos fijos semanales de S/. 4000.

a) Halle el costo semanal C como función del número de unidades de los dos tipos de cintas producidas.

b) Calcule el costo total de producir 10000 cintas de 60 minutos y 8000 cintas de 90 minutos.

c) Si la empresa vende la cinta de 60 minutos a S/. 2,50 y de 90 minutos a S/. 3,50 cada una, halle la utilidad semanal como función del número de unidades producidas y vendidas por semana.

Solución

Sea x el número de casetes de 60 minutos producidos en una semana e y el número de casetes de 90 minutos producidos en una semana.

a) El costo semanal de producir cintas de 60 y 90 minutos es

$$C(x;y) = 2x + 3y + 4000$$

b) El costo total de producir 10000 cintas de 60 minutos y 8000 cintas de 90 minutos es

$$C(10000;8000) = 20000 + 24000 + 4000 = S/.\ 48000$$

c) La utilidad semanal de la empresa es

$$U(x;y) = \text{Ingreso semanal} - \text{Costo semanal}$$

$$= 2{,}5x + 3{,}5y - (2x + 3y + 4000) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 4000$$

Ejemplo 11. Trace la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x;y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4}$ b) $g(x;y) = 4 + \sqrt{9 + x^2 + y^2}$

c) $h(x;y) = 3 + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12}$

d) $j(x;y) = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{16x + 4y - 4x^2 - y^2 - 4}$

Solución

a) $D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + y^2 - 4y + 4 \geq 0\}$

$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + (y-2)^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$

La gráfica de la función f está formada por el conjunto de puntos $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} \Leftrightarrow (z-3)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow (z-3)^2 = x^2 + (y-2)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 - (z-3)^2 = 0$$

Esto es, la gráfica de la función es la mitad inferior del cono elíptico con vértice en el punto $V(0;2;3)$ (ver Fig. 2.9)

El rango de f es el intervalo $R_f = \langle -\infty; 3]$

b) $D_g = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 9 + x^2 + y^2 \geq 0\} = \mathbb{R}^2$

La gráfica de la función g está formada por el conjunto de puntos $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$z = 4 + \sqrt{9 + x^2 + y^2} \Leftrightarrow (z-4)^2 = 9 + x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow (z-4)^2 - x^2 - y^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{(z-4)^2}{9} - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Esto es, la gráfica de la función g es la parte superior del hiperboloide elíptico de dos hojas con centro en el punto $C(0;0;4)$ (ver Fig. 2.10).

El rango de la función g es el intervalo $R_g = [7;+\infty\rangle$

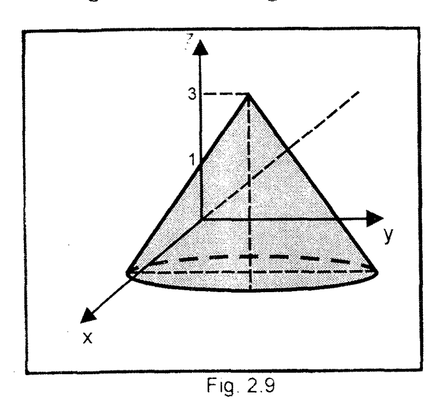


Fig. 2.9

Fig. 2.10

c) $D_h = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 \geq 0\}$
$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 1\}$

Luego, el dominio de la función h es el conjunto de puntos $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen o están al exterior de la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

La gráfica de la función h es el conjunto de puntos $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ que satisface la ecuación

$$z = 3 + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12} \Leftrightarrow (z-3)^2 = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 - (z-3)^2 = 1$$

Esto es, la gráfica de la función h es la mitad superior del hiperboloide elíptico de una hoja con centro en el punto $C(2;3;3)$ (ver Fig. 2.11).

El rango de la función h es el intervalo $R_h = [3;+\infty\rangle$

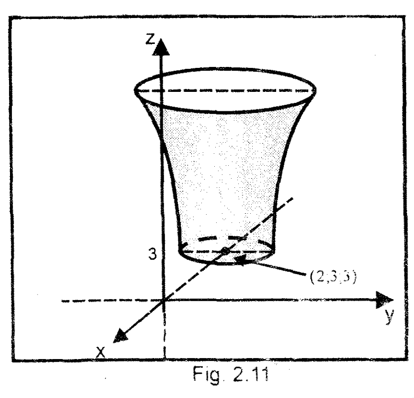


Fig. 2.11

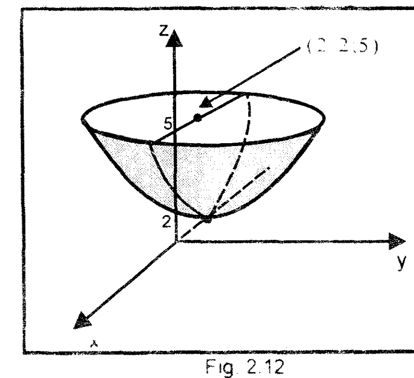


Fig. 2.12

d) $D_j = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; 16x + 4y - 4x^2 - y^2 - 4 \geq 0\}$

$$= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} \leq 1\right\}$$

Luego, el dominio de la función j es el conjunto de puntos $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen o están en el interior de la elipse

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

La gráfica de la función j está formada por el conjunto de puntos $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$z = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{16x + 4y - 4x^2 - y^2 - 4}$$

$$\Leftrightarrow (z-5)^2 = \frac{9}{16}(16x + 4y - 4x^2 - y^2 - 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(z-5)^2}{9} + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

Esto es, la gráfica de la función j es la parte inferior del elipsoide de centro el punto $C(2;2;5)$ (ver Fig. 2.12).

El rango de la función j es el intervalo $R_j = [2;5]$

Ejemplo 12. Determine analítica y gráficamente el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = \sqrt{y\,sen\,x}$ b) $g(x;y) = \sqrt{sen\,(x^2+y^2)} + arcsen\left(\frac{y}{x}\right)$

Solución

a) $D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; y\,sen\,x \geq 0\}$

$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; 2k\pi \leq x \leq (1+2k)\pi \wedge y \geq 0\}$

$\cup\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \; / \; (1+2k)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi \wedge y \leq 0, k \in \mathbb{R}\}$

Luego, el dominio de la función f es el conjunto sombreado en la figura 2.13.

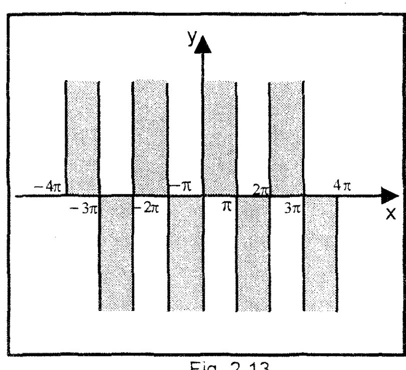


Fig 2.13

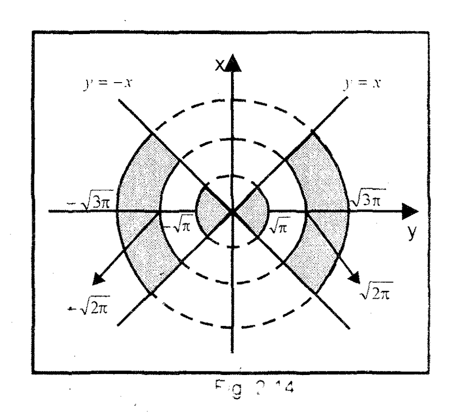


Fig 2.14

b) $D_g = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ sen\,(x^2+y^2) \geq 0 \wedge -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1)\right\}$

$= \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq sen\,(x^2+y^2) \leq 1 \wedge -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1\right\}$

$= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2k\pi \leq x^2+y^2 \leq (1+2k)\pi \wedge -x \leq y \leq x \wedge x > 0, k \in \mathbb{N}\}$

$\cup \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 2k\pi \leq x^2+y^2 \leq (1+2k)\pi \wedge x \leq y \leq -x \wedge x < 0, k \in \mathbb{N}\}$

donde $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$

La gráfica de la función g se muestra en la figura 2.14 para $k = 0$ y $k = 1$.

EJERCICIOS

1.- Determine analítica y gráficamente el dominio de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ b) $f(x;y) = e^{-2x}\sqrt{y-1}$

c) $f(x;y) = \dfrac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{4-x-y^2}} + \dfrac{\sqrt{x}+y^2}{9+y^2}$ d) $f(x;y) = arcsen\,x + \dfrac{\ln(y-x^2)}{\sqrt{x^2-y^2}}$

e) $f(x;y) = \ln\left(\dfrac{y-1}{x-1}\right) + \sqrt{1-(x-1)^2-(y-1)^2}$

f) $f(x;y) = \dfrac{sen\,(x-y) + \sqrt{2x+y}}{\sqrt{2x-x^2-4y^2-16y-1}}$

g) $f(x;y) = [\![\sqrt{y^2-1}]\!] + [\![\sqrt{1-x^2}]\!]$ h) $f(x;y) = [\![\sqrt{x^2-y^2}]\!] + [\![\sqrt{xy}]\!]$

i) $f(x;y) = \ln(36-4x^2-9y^2) - arcsen\left(\dfrac{x}{x+y}\right)$

j) $f(x;y) = \dfrac{\ln(x-2y)}{\sqrt{y-2x}} + \arccos\left(\dfrac{y}{x-y}\right)$

k) $f(x;y;z) = \sqrt{z^2-x^2-y^2} + \ln(9-x^2-y^2-z^2)$

l) $f(x;y;z) = \dfrac{4+\sqrt{16-z^2}}{4+\sqrt{16-x^2-y^2}}$ ll) $f(x;y;z) = \ln(xyz)$

m) $f(x;y;z) = arcsen\,x + arcsen\,y + \arctan z$

2.- Trace la gráfica de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = 2+4x^2+4y^2$ b) $f(x;y) = \cos x \ , -\pi \leq x \leq \pi$

c) $f(x;y) = 4+\sqrt{x^2+y^2}$ d) $f(x;y) = 4-\sqrt{4+x^2+y^2}$

e) $f(x;y) = 2-\sqrt{16x-4x^2-4y^2-16y-16}$ f) $f(x;y) = e^{-y^2}$

g) $f(x;y) = 4-\sqrt{x^2+y^2-4x+6y-3}$

h) $z = 3+\sqrt{y^2-4x^2+16x-8y-16}$

3.- Dibuje las curvas de nivel ($f(x;y)=k$) de las siguientes funciones para cuatro valores de k.

a) $f(x;y)=\sqrt{xy}$ b) $f(x;y)=(1+x+y)^2$

c) $f(x;y)=1-|x|-|y|$ d) $f(x;y)=\dfrac{y}{\sqrt{x}}$

e) $f(x;y)=\ln(x^2+y)$ f) $f(x;y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$

g) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y}{x+y^2}$ h) $f(x;y)=e^{(x^2+y^2)}$

i) $f(x;y)=(x-1)^2-(y-1)^2$ j) $f(x;y)=\sqrt{100-25x^2-4y^2}$

4.- Dibuje las superficies de nivel ($f(x;y;z)=k$) de las siguientes funciones para 3 valores de k e indique el nombre.

a) $f(x;y;z)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}$ b) $f(x;y;z)=x^2+y^2-z^2$

c) $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2$ d) $f(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2-4z-2x}$

e) $f(x;y;z)=z-(x-2)^2-(y-3)^2$

f) $f(x;y;z)=4x^2+9y^2+36(z+1)^2$

5.- Sea $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ una función de dos variables tal que

$$f(x+y;x-y)=5x^2+5y^2+6xy$$

Halle $f(x;y)$ y esboce la gráfica de f.

6.- En los siguientes ejercicios están definidas las funciones f y g. Encuentre $h(x;y)$ si $h=f\circ g$. Halle el dominio de h.

a) $f(t)=\arctan t$, $g(x;y)=\sqrt{x^2-y^2}$

b) $f(t)=arcsen\, t$, $g(x;y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

7.- Dado que $f(x;y;z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}$, encuentre la superficie de nivel que pasa por $(-2;3;-10)$.

8.- Una empresa elabora dos productos A y B. El costo de los materiales y de la mano de obra es de S/. 14 por cada unidad del producto A y de S/. 25 por cada unidad de B. Los costos fijos son de S/. 2000 por semana.

a) Exprese el costo semanal C en términos de las unidades de A y B producidas cada semana.

b) ¿Cuál es el costo total de producir 200 unidades de A y 150 unidades de B?.

R. 8550

c) Si la empresa vende los dos tipos de producto A y B a S/. 20 y S/. 30 cada una respectivamente, obtenga la utilidad semanal de la empresa como función del número de unidades producidas y vendidas por semana.

R. $U = 6x + 5y - 2000$

9.- Se construye un tanque que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular abierto de modo que albergue 1000 metros cúbicos de agua. Los costos de los materiales son: S/. 20 el metro cuadrado de la base y de S/. 10 el metro cuadrado para las paredes verticales.

a) Determine el costo total C de construir el tanque como función de las dimensiones de la base del tanque.

b) Calcule el costo total de construir un tanque cuyas dimensiones de la base son: largo 50 metros y ancho 30 metros.

10.- Una fábrica de pinturas vende dos marcas de pintura. Las cifras de venta indican que si la primera marca se vende a x nuevos soles por galón y la segunda a y nuevos soles por galón, la demanda de la primera marca será $D_1(x; y) = 200 - 10x + 20y$ galones por mes y la demanda de la segunda marca será $D_2(x; y) = 100 + 5x - 10y$ galones por mes.

a) Exprese el ingreso total mensual de la fábrica de pinturas, obtenido de la venta de la pintura, como una función de los precios x e y.

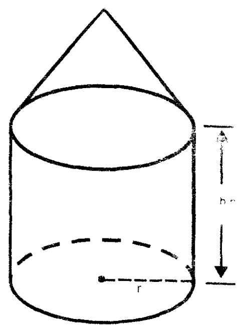
R. $I = 200x + 100y + 25xy - 10x^2 - 10y^2$

b) Calcule el ingreso de la fábrica si la primera marca se vende a S/. 20 el galón y la segunda a S/. 15 el galón. R. S/. 6750

11.- Una tapa cónica descansa sobre la parte superior de un cilindro circular recto, como se muestra en la figura adjunta.

Si la altura de la tapa es dos tercios de la altura del cilindro, exprese el volumen del sólido como función de las variables indicadas.

$$R.\ V = \frac{11}{9}\pi r^2 h$$



12.- Una lata para refresco se construye con una envolvente lateral de hojalata, y con tapa y base de aluminio. Dado que el costo de la tapa es S/. 20 por unidad cuadrada, de S/. 10 por unidad cuadrada para la base, y de S/. 30 por unidad

cuadrada para la envolvente. Determine la función de costo $C(r;h)$ en donde r es el radio de la lata y h su altura. R. $30\pi r^2 + 60\pi rh$

13.- Una tienda de calzado vende dos clases de zapatos de damas que son parecidos pero están hechos por diferentes fabricantes. El costo para la tienda del par de zapatos de la primera clase es de \$ 30 y el costo de la segunda es de \$ 40. Se ha determinado por experiencia que si el precio de venta de la primera clase es x doláres y el precio de venta de la segunda es y doláres, entonces la venta mensual total de la primera clase es $(70 - 5x + 4y)$ pares de zapatos y la venta mensual total de la segunda clase es $(80 + 6x - 7y)$ pares de zapatos.

a) Exprese la utilidad en términos del precio de venta de los zapatos de primera y segunda clase.

b) ¿Cuál es la utilidad si el precio de venta de los calzados de primera y segunda clase es de \$ 40 y \$ 50 respectivamente?

14.- Si $T(x;y)$ es la temperatura en un punto $(x;y)$ de una placa de metal ligero en el plano XY, entonces a las curvas de nivel de T se les llama curvas isotérmicas. Todos los puntos de una de estas curvas están a la misma temperatura. Suponga que una placa ocupa el primer cuadrante y que $T(x;y) = xy$. Una hormiga que parte del punto $(1;4)$ quiere caminar sobre la placa de modo que la temperatura en su trayectoria permanezca constante. ¿Cuál debe ser la trayectoria de la hormiga?

$$R.\ y = \frac{4}{x}$$

2.2 CONJUNTOS ABIERTOS Y CERRADOS

Definición 4. Sean $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, $Y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ dos puntos en el espacio $\mathbb{R}^n$. La distancia entre estos puntos es dada por

$$d(X;Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = \|Y - X\|$$

Definición 5. Sea $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ un punto en el espacio $\mathbb{R}^n$ y r un número real positivo. Se llama vecindad abierta o bola abierta de centro a y radio r, al conjunto

$$B(a;r) = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ d(X;a) < r\} = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ \|X - a\| < r\}$$

Definición 6. Se denomina vecindad cerrada o bola cerrada de centro a y radio r, al conjunto

$\overline{B}(a;r) = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ d(X;a) \leq r\}$

Definición 7. Una vecindad o bola reducida de centro a y radio $r > 0$, es el conjunto

$B'(a;r) = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ 0 < d(X;a) < r\} = B(a;r) - \{a\}$

Ejemplo 13. a) En la recta real ($\mathbb{R}$) son vecindades de centro a los intervalos

$a-r \quad a \quad a+r \qquad\qquad a-r \quad a \quad a+r$

$B(a;r) = \langle a-r; a+r \rangle$; $\overline{B}(a;r) = [a-r; a+r]$

b) En el plano $\mathbb{R}^2$, son vecindades los círculos de centro $a = (a_1; a_2)$

$B(a;r) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r^2\}$ (Fig. 2.15)

$\overline{B}(a;r) = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq r^2\}$ (Fig. 2.16)

$B'(a;r) = B(a;r) - \{(a_1;a_2)\}$ (Fig. 2.17)

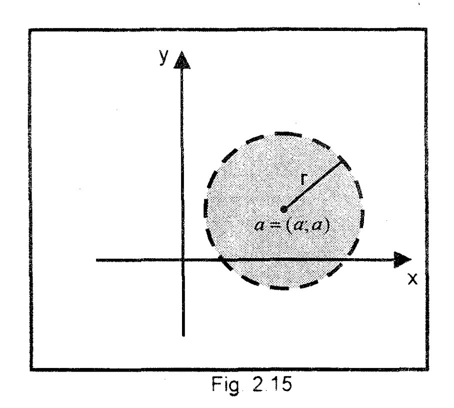


Fig 2.15

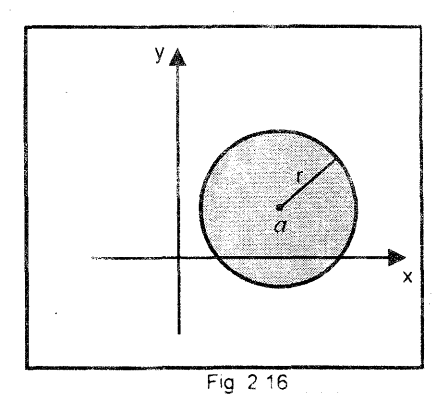


Fig 2.16

c) En el espacio $\mathbb{R}^3$, son vecindades las esferas de centro $a = (a_1; a_2; a_3)$ y radio r.

$B(a;r) = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + (z-a_3)^2 < r^2\}$ (Fig. 2.18)

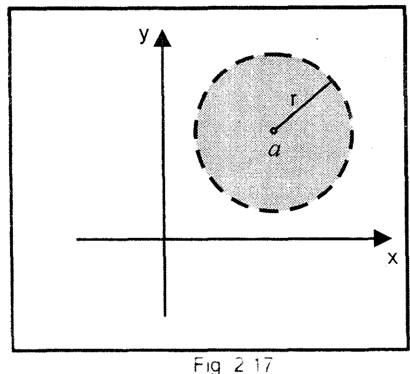


Fig 2 17

Fig 2 18

Definición 8. Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es abierto s.s.s. $\forall X \in D, \exists \delta > 0$ tal que $B(X; \delta) \subset D$

Ejemplo 14. a) En la recta $\mathbb{R}$, $D = \langle a; b \rangle$ es un conjunto abierto.

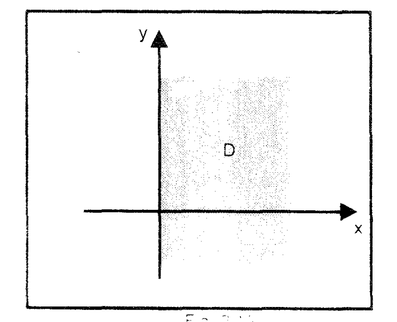
b) $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0\}$ es un conjunto abierto (Fig. 2.19)

c) $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0\}$ no es un conjunto abierto.

d) $A = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y > 0\}$ es un conjunto abierto.

e) $B = \{X \in \mathbb{R}^3 \,/\, D(X; Y) \geq r\}$ no es un conjunto abierto.

f) $S = \mathbb{R}^n$, $S = \emptyset$ son conjuntos abiertos.



Definición 9. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado s.s.s. el complemento es un conjunto abierto.

Ejemplo 15.

a) $S = [a; b] \subset \mathbb{R}$ es cerrado, pero $A = [a; b\rangle \subset \mathbb{R}$ no es cerrado

b) $S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy \leq -1\}$ es un conjunto cerrado, pues $S' = \mathbb{R}^2 - S$ es abierto. Fig. (2.20)

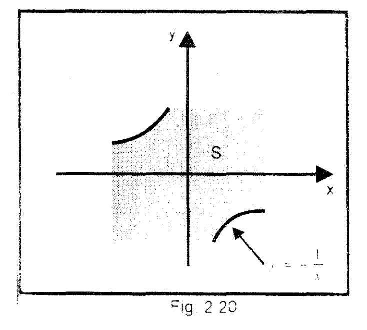


Fig 2 20

c) $M = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \, a \leq x \leq b \,, c \leq y \leq d \,, e \leq z \leq f\}$ es un conjunto cerrado.

Definición 10. (Punto de Acumulación). Un punto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, si toda bola reducida $B'(P_0; r)$ contiene infinitos puntos de D, es decir $B'(P_0; r) \cap D \neq \emptyset$.

Ejemplo 16. Sea $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < 0, y < 0\} \cup \{(2; 2)\}, P_0(0; 0)$ es un punto de acumulación de D, pues para cualquier $r > 0$, $B'(P_0; r) \cap D \neq \emptyset$. Más aún, cualquier punto de D distinto de $(2; 2)$ es un punto de acumulación de D, y $P_1(2; 2)$ no es punto de acumulación de D.

2.3 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

En esta sección se extiende los conceptos de límite de las funciones de una variable real, abordados en el capitulo 3 de *Tópicos de Cálculo* Vol. I, a las funciones de varias variables.

Definición 11. Sean $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en el conjunto D, $P_0(x_0; y_0)$ un punto de acumulación de D y L un número real cualquiera, entonces

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = L$$

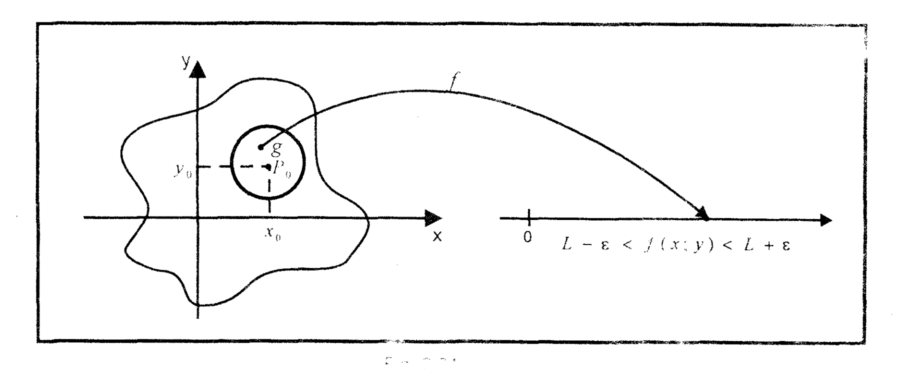
si y solo si para cada $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|f(x; y) - L| < \varepsilon$, siempre que

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Esta definición en términos de vecindades es

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,/\, \forall(x; y) \in B'\big((x_0; y_0); \delta\big) \cap D_f$$

$$\Rightarrow f(x; y) \in B(L; \varepsilon) \quad \text{(Fig. 2.21)}$$



Observación 1. La definición 11 es mucho más compleja que el de las funciones de una variable real, ya que en este caso, únicamente se tiene una trayectoria lineal para aproximarse a un punto, por la izquierda o por la derecha o por ambos lados; sin embargo, en el caso de las funciones de dos variables existen infinitas trayectorias (o curvas) para aproximarse al punto $(x_0; y_0)$, como se muestra en la figura 2.22.
El estudio de los límites para funciones de n variables es análogo.

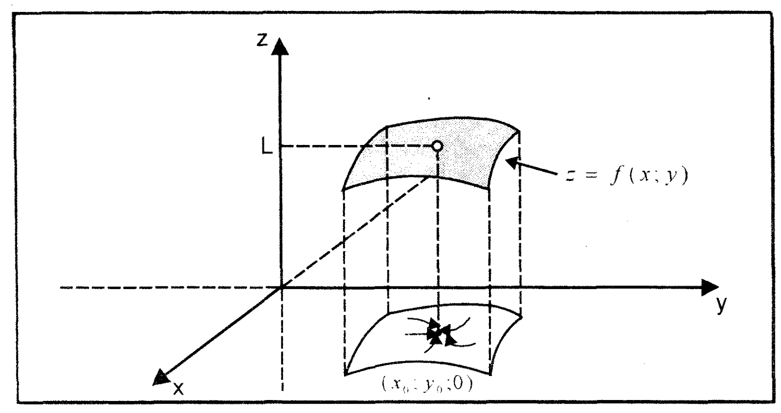


Fig 2 22

Observación 2. $\|(x; y) - (a; b)\| < \delta \Longrightarrow |x - a| < \delta \wedge |y - b| < \delta$

Ejemplo 17. Demuestre que $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} (x + y^2) = 5$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $|x + y^2 - 5| < \varepsilon$, siempre que $0 < \|(x; y) - (1; 2)\| < \delta$. Para esto expresamos $|x + y^2 - 5|$ en términos de $|x - 1| \wedge |y - 2|$, esto es

$$
\begin{aligned}
|x + y^2 - 5| &= |(x - 1) + (y - 2)^2 + 4y - 8| \\
&= |(x - 1) + (y - 2)^2 + 4(y - 2)| \\
&\leq |x - 1| + |y - 2||y - 2| + 4|y - 2|
\end{aligned}
$$

Así, se tiene:

$$|x + y^2 - 5| \leq |x - 1| + |y - 2||y - 2| + 4|y - 2| < \varepsilon \quad \ldots \quad (1)$$

Ahora, restringimos la elección de δ de modo que $\delta \leq 1$. Luego,

$$\|(x; y) - (1; 2)\| < \delta \leq 1 \Longrightarrow |x - 1| < \delta \wedge |y - 2| < \delta < 1 \quad \ldots \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene:

$$|x + y^2 - 5| \leq |x - 1| + |y - 2||y - 2| + 4|y - 2| < \delta + \delta + 4\delta = 6\delta = \varepsilon$$

Por tanto, si escogemos $\delta = mín\left\{1; \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ se verifica $|x + y^2 - 5| < \varepsilon$, siempre que $0 < \|(x; y) - (1; 2)\| < \delta$. Esto demuestra que $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} (x + y^2) = 5$

Ejemplo 18. Demuestre que $\lim\limits_{(x;y)\to(3;-1)} (x^2 + 2xy) = 3$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$; debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $|x^2 + 2xy - 3| < \varepsilon$, siempre que $0 < \|(x; y) - (3; -1)\| < \delta \Rightarrow 0 < |x - 3| < \delta \wedge |y + 1| < \delta$.

Para esto expresamos $|x^2 + 2xy - 3|$ en términos de $|x - 3| \wedge |y + 1|$, esto es,

$$|x^2 + 2xy - 3| = |x^2 - 2x - 3 + 2xy + 2x| = |(x - 3)(x + 1) + 2x(y + 1)|$$
$$\leq |x + 1||x - 3| + 2|x||y + 1| < \varepsilon \quad \ldots \quad (1)$$

Si hacemos $\delta < 1$, se tiene $|x - 3| < 1, |y + 1| < 1$

De $|x - 3| < 1$, se obtiene $|x + 1| < 5$ y $|x| < 4$ ... (2)

Luego, reemplazando (2) en (1) resulta

$$|x^2 + 2xy - 3| < |x + 1||x - 3| + 2|x||y + 1| < 5\delta + 8\delta = 13\delta = \varepsilon$$

Por tanto, si escogemos $\delta = mín\left\{1; \frac{\varepsilon}{13}\right\}$ se verifica $|x^2 + 2xy - 3| < \varepsilon$ siempre que $0 < \|(x; y) - (3; -1)\| < \delta$, $(0 < |x - 3| < \delta \wedge 0 < |y + 1| < \delta)$

Por tanto, $\lim\limits_{(x;y)\to(3;-1)} (x^2 + 2xy) = 3$

PROPIEDADES DE LÍMITES

Teorema 1. Sean $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones de dos variables tales que $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = L$, $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} g(x; y) = M$ y $P_0(x_0; y_0)$ es un punto de acumulación del conjunto $D_f \cap D_g \subset \mathbb{R}^2$, entonces se tiene

a) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} [f(x; y) \pm g(x; y)] = L \pm M$

b) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} [f(x; y). g(x; y)]$

$$= \left(\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y)\right).\left(\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y)\right) = L. M$$

c) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} [c\, f(x; y)] = c \lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x; y) = cL$ (c = constante)

d) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \dfrac{f(x; y)}{g(x; y)} = \dfrac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$

REGLA DE DOS TRAYECTORIAS PARA CALCULAR LÍMITES

Si los valores de $\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)$ son distintos cuando $(x;y)$se aproxima a $(x_0;y_0)$a través de dos trayectorias diferentes, entonces

$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)$ no existe

Ejemplo 19. Dada la función $f(x;y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Calcule $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ en caso exista.

Solución

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{0;0\}$

Para calcular el límite, consideremos dos trayectorias diferentes que pasan por el punto $P_0(0;0)$, esto es

$$T_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 0\} \ \text{y} \ T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x\}$$

Los límites sobre estas trayectorias son:

$$\text{Sobre } T_1\text{: } \lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;0) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\text{Sobre } T_2\text{: } \lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, de acuerdo a la regla de dos trayectorias se concluye que $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ no existe.

Ejemplo 20.- Dada la función $f(x;y) = \dfrac{xy^2}{x^3+y^3}$. Calcule $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$

Solución

$$D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^3 + y^3 \neq 0\} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \neq -x\}$$

Sean las trayectorias que pasan por el origen de coordenadas

$$T_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x\} \ \text{y} \ T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = x^2\}$$

Los límites sobre estas trayectorias son:

$$\text{Sobre } T_1\text{: } \lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sobre } T_2\text{: } \lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{x\to 0} f(x;x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^3+x^6} = 0$$

Por consiguiente, $\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ no existe.

Observación 3. En los ejemplos 19 y 20 hemos concluido que no existe el límite, pues encontramos dos trayectorias que conducen a límites diferentes. Sin embargo, aunque las dos trayectorias hubieran conducido a un mismo límite, no se puede concluir que el límite existe. Para llegar a esta conclusión, debemos probar que el límite es el mismo para todas las trayectorias. Esta tarea sugiere el uso de la definición para demostrar la existencia o no existencia del límite.

Observación 4. En el cálculo del límite de funciones de varias variables, podemos sustituir directamente como hacíamos con funciones de una sola variable, siempre que la expresión resultante tenga sentido. Por el contrario, si la sustitución directa da lugar a una forma indeterminada, debemos investigar la existencia del límite mediante la regla de L'Hospital o siguiendo diversas trayectorias que pasan por el punto, lo que puede mostrar que el límite no existe. También existen métodos que utilizan coordenadas polares en el cálculo del límite de una función de dos variables cuando $(x; y)$ tiende a $(0; 0)$.

Ejemplo 21. Calcule los siguientes límites en caso existan

a) $\lim\limits_{(x;y)\to(-2;3)} \dfrac{2xy^2 - 3}{x^2 + y^2}$ b) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;-1)} \dfrac{x^3y^3 - 1}{x^2y^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{(x;y)\to(9;9)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;2)} \dfrac{1 - e^{(2x+y)^2}}{sen^2(2x + y)}$

e) $\lim\limits_{(x;y)\to(-3;2)} \dfrac{\ln(43 + 7xy)}{\arctan(3xy + 18)}$ f) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{4xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

g) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{9y^2(x + 1) + 3x^2}{3y^2 + x^2}$ h) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

i) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;1)} f(x; y)$, donde $f(x; y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \ln\left(\dfrac{2x^2}{x^2 + y^2}\right)$

j) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} xy[1 - cot^2(xy)][\ln(1 + sen\,(xy)]$

k) $\lim\limits_{(x;y;z)\to(0;0;0)} \dfrac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}$

Solución

a) $\lim\limits_{(x;y)\to(-2;3)} \dfrac{2xy^2 - 3}{x^2 + y^2} = \dfrac{-39}{4 + 9} = -3$

b) El límite es de la forma $0/0$. Al factorizar $xy - 1$ en el numerador y en el denominador, se tiene

$$\lim_{(x;y)\to(-1;-1)} \frac{x^3y^3-1}{x^2y^2-1} = \lim_{(x;y)\to(-1;-1)} \frac{(xy-1)(x^2y^2+xy+1)}{(xy-1)(xy+1)} = \frac{3}{2}$$

c) El límite es de la forma $0/0$. Al efectuar una racionalización en el denominador, se obtiene

$$\lim_{(x;y)\to(9;9)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{y}-\sqrt{x}} = \lim_{(x;y)\to(9;9)} \frac{(x-y)(x+y)(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{(x;y)\to(9;9)} \frac{(x-y)(x+y)(\sqrt{y}+\sqrt{x})}{y-x}$$

$$= \lim_{(x;y)\to(9;9)} \left[-(x+y)(\sqrt{y}+\sqrt{x})\right] = -108$$

d) El límite es de la forma $0/0$. Al hacer el cambio de variable $u = 2x + y$, se obtiene una expresión en términos de u, donde $u \to 0$ cuando $(x;y) \to (-1;2)$. Luego, al aplicar la regla de L´Hospital (L´H), se tiene

$$L = \lim_{(x;y)\to(-1;2)} \frac{1-e^{(2x+y)^2}}{sen^2(2x+y)} = \lim_{u\to 0} \frac{1-e^{u}}{sen^2\,(u)} \overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{-e^{u^2}2u}{2\,sen\,u.\cos u}$$

$$= -\lim_{u\to 0} \frac{ue^{u^2}}{sen\,u} \overset{L'H}{=} -\lim_{u\to 0} \frac{e^{u^2}+2u^2e^{u^2}}{\cos u} = -1$$

e) El límite es de la forma $0/0$. Al hacer el cambio de variable $u = 6 + xy$, se obtiene

$$L = \lim_{(x;y)\to(-3;2)} \frac{\ln(1+7(xy+6))}{\arctan[3(xy+6)]} = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+7u)}{\arctan(3u)}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\dfrac{7}{1+7u}}{\dfrac{3}{1+9u^2}} = \frac{7}{3}$$

f) El límite es de la forma $0/0$. Si $(r;\theta)$ son las coordenadas polares del punto $(x;y)$, entonces se tiene

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases}$$

Luego,

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{4r^2\,sen\,\theta\cos\theta}{r} = 4\lim_{r\to 0} r\,sen\,\theta\cos\theta = 0$$

(pues, $|sen\,\theta\cos\theta| \le 1$ para cualquier valor de θ)

g) El límite es de la forma 0/0. Al usar coordenadas polares, se tiene:

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{9y^2(x+1)+3x^2}{3y^2+x^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2[9r\, sen^2\theta \cos\theta + 9sen^2\theta + 3cos^2\theta]}{r^2[3sen^2\theta + cos^2\theta]}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{9r\, sen^2\theta \cos\theta + 6sen^2\theta + 3}{2\, sen^2\theta + 1} = \frac{3(2sen^2\theta + 1)}{2\, sen^2\theta + 1} = 3$$

h) El límite es de la forma $0/0$. Al utilizar coordenadas polares, resulta

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(cos^2\theta - sen^2\theta)}{r^2} = cos^2\theta - sen^2\theta$$

Como este límite depende del ángulo θ, entonces no existe.

i) Como $f(x;y) = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)}{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$, se hace el cambio de variable $u = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

Luego, se tiene

$$L = \lim_{(x;y)\to(1;1)} f(x;y) = \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \overset{L'H}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1$$

j) El límite es de la forma $0.\infty$. Al expresar cotangente en términos de seno y coseno, se obtiene:

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} xy[1 - cot^2(xy)]\,.\ln[1 + sen\,(xy)]$$

$$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy[sen^2(xy) - cos^2(xy)]\ln[1 + sen\,(xy)]}{sen^2(xy)}$$

$$= \lim_{(x;y)\to(0;0)} [sen^2(xy) - cos^2(xy)].\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{sen(xy)}.\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{\ln[1 + sen(xy)]}{sen(xy)}$$

$$= (0-1)(1)(1) = -1$$

k) El límite es de la forma $0/0$. Si $(\rho;\theta;\varphi)$ son las coordenadas esféricas del punto $(x;y;z)$, entonces se tiene

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\ sen\,\varphi \\ y = \rho\ sen\,\theta\ sen\,\varphi\ , \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

Dado que $\rho \to 0$ cuando $(x;y;z) \to (0;0;0)$, entonces se tiene

$$L = \lim_{(x;y;z)\to(0;0;0)} \frac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$L = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2[\cos\theta \ sen\,\theta \ sen^2\varphi + sen\,\theta \ sen\,\varphi \cos\varphi + \cos\theta \ sen\,\varphi \cos\varphi]}{\rho^2}$$

$$= \cos\theta \ sen\,\theta \ sen^2\varphi + sen\,\theta \ sen\varphi \cos\varphi + \cos\theta \ sen\,\varphi \cos\varphi$$

Como este resultado depende de los ángulos θ y φ, entonces no existe el límite.

EJERCICIOS

1.- Utilizando definición de límite, demuestre los siguientes límites

a) $\lim\limits_{(x;y)\to(3;1)} (x^2 - y^2 + 2x - 4y) = 10$ b) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;-2)} (3x^2 - 4y^2) = -4$

c) $\lim\limits_{(x;y)\to(3;-1)} (x^2 + y^2 - 4x + 2y) = -4$ d) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;4)} (x^2 + 2x - y) = 4$

2.- En los siguientes ejercicios demuestre que para la función dada $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ no existe

a) $f(x;y) = \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$, tome $T_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 2x\}$ y

$T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^3 = x\}$, donde $(x;y) \neq (0;0)$

b) $f(x;y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, tome $T_1 = eje\ X$, $T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x\}$

c) $f(x;y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$, $T_1 = \{(x;y) \ / y = x\}$, $T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /y^2 = x\}$

d) $f(x;y) = \dfrac{x^2 + y}{x^2 + y^2}$, $T_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x\}$, $T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x^2\}$

e) $f(x;y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4 + y^4}$, $T_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /y = 0\}$, $T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \ y = x\}$

3.- En los siguientes ejercicios pruebe que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ existe

a) $f(x;y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ b) $f(x;y) = \dfrac{3x^2y}{x^2 + y^2}$

c) $f(x;y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ *R.* el límite es cero.

d) $f(x;y)=\begin{cases} x\, sen\left(\dfrac{1}{y}\right)+y\, sen\left(\dfrac{1}{x}\right), si\ x\neq 0\ , y\neq 0 \\ 0 \quad , \quad si\ x=0\ ó\ y=0 \end{cases}$ R.El límite es cero.

4.- Para $f(x;y)=\ln\left(\dfrac{a-x}{a-y}\right)$, donde $x<a, y<a$, demuestre que

$\lim\limits_{(x;y)\to(a;a)} f(x;y)$ no existe.

Sugerencia: Considerar dos rectas distintas que pasan por el punto $(a;a)$.

5.- Calcule los siguientes límites, en caso existan

a) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{e^{xy}-1}{x}$ $R.0$ b) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ $R.0$

c) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{\cos(xy)-1}{x}$ $R.0$ d) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;-2)} \dfrac{\ln(x^2+y^2-4)}{x^2+y^2-5}$ $R.1$

e) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x\, sen\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ $R.0$

f) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;2)} \dfrac{(\cos x-1)(y-2)}{x^2(y^3-8)}$ $R.-\dfrac{1}{24}$ g) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;1)} e^{\frac{-1}{x^2(y-1)^2}}$ $R.0$

h) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} \dfrac{arcsen\,(xy-2)}{\arctan(3xy-6)}$ $R.\dfrac{1}{3}$ i) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ $R.1$

j) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} (x^2+y^2)sen\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ $R.0$ k) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{1-\cos(sen\, 4xy)}{sen^2(sen\,(3xy))}$ $R.\dfrac{8}{9}$

l) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;2)} \dfrac{sen\,(xy)}{x}$ $R.2$ ll) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{\cos(xy)-\cos(sen\,(2xy))}{x^2y^2}$ $R.\dfrac{3}{2}$

m) $\lim\limits_{(x;y)\to(-1;2)} \left[\dfrac{1-\cos(2xy+2y)}{(x+1)^2y^2}+\operatorname{arccot}\left(\dfrac{xy}{(x+1)^2}\right)\right]$ $R.2+\pi$

n) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy\, sen\,(sen\,(2xy))}{1-\cos(sen\, 4xy)}$ $R.\dfrac{1}{4}$ o) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to k}} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$ $R.e^k$

p) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \left(\dfrac{1+\tan xy}{1+sen\, xy}\right)^{\frac{1}{sen\, xy}}$ $R.1$

q) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{\cos\big(sen\,(x+y)\big)-\cos(x+y)}{(x+y)^2}$ $R.0$

r) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;1)} f(x;y)$, donde $f(x;y) = \dfrac{x^2+y^2+2xy-4}{\sqrt{x+y-2}}$ $\qquad R.0$

s) $\lim\limits_{(x;y)\to(4;-2)} f(x;y)$, donde

$$f(x;y) = \frac{1-\cos(xy+2x)}{x(y+2)^2} + 4\arctan\left(\frac{x^3y^3}{(y+2)^2}\right) \qquad R.2-2\pi$$

t) $\lim\limits_{(x;y)\to(+\infty;1)} f(x;y), donde$

$$f(x;y) = \left(1+\frac{4y}{x^2}\right)^{x^2} + 2\arctan(x+y+5) + \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad R.e^4+\pi$$

2.4 CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición 12. Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables definida en el conjunto D y sea $(x_0;y_0) \in D$, con $(x_0;y_0)$ punto de acumulación de D.
La función f es continua en $(x_0;y_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = f(x_0;y_0)$
Se dice que la función f es continua en el conjunto D, si es continua en cada punto del conjunto D.

Ejemplo 22. Dada la función $f(x;y) = 5xy$. Determine si f es continua en $(2;1)$

Solución

Como $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} f(x;y) = \lim\limits_{(x;y)\to(2;1)} 5xy = 10 = f(2;1)$, entonces la función f es continua en $(2;1)$.

Ejemplo 23.- Sea $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & (x;y) = (0;0) \end{cases}$

Determine si f es continua en $(0;0)$.

Solución

i) $f(0;0) = 0$

ii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ es de la forma $0/0$. Al utilizar coordenadas polares, resulta:

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos\theta\ sen^2\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r(\cos\theta\ sen^2\theta) = 0$$

Como $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = 0 = f(0;0)$, entonces f es continua en $(0;0)$

Ejemplo 24.- Dada la función

$$f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2y + (y-x)^2}, & (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Determine si f es continua en $(0;0)$.

Solución

i) $f(0;0) = 0$

ii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ es de la forma $0/0$. Luego, al utilizar coordenadas polares se tiene:

$$L = \lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^3y^3}{x^2y + (y-x)^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^6 \cos^3\theta \, sen^3\theta}{r^2[r \cos^2\theta \, sen\,\theta + (sen\,\theta - \cos\theta)^2]}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^4 \cos^3\theta \, sen^3\theta}{r \cos^2\theta \, sen\,\theta + (sen\,\theta - \cos\theta)^2}$$

Como este límite depende del ángulo θ, entonces el límite no existe. Por consiguiente, f no es continua en el punto $(0;0)$.

Ejemplo 25.- Dada la función

$$f(x;y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right), & (x;y) \neq (0;0) \\ A, & (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

Calcule el valor de A para que la función f sea continua en $(0;0)$.

Solución

Para calcular el valor de A, es suficiente calcular $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$

Así, al usar coordenadas polares resulta

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim_{r\to 0} \arctan\left[\frac{r^4(\cos^4\theta + sen^4\theta)}{r^2}\right]$$

$$= \lim_{r\to 0} \arctan[r^4(\cos^4\theta + sen^4\theta)] = 0$$

Como f debe ser continua en $(0;0)$, se tiene:

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = 0 = f(0;0) = A$$

Por tanto, $A = 0$.

PROPIEDADES DE CONTINUIDAD

Sean f y g funciones de dos variables continuas en el punto $(x_0; y_0)$, entonces

a) cf es continua en $(x_0; y_0)$, siendo c constante real.

b) $f \pm g$ es continua en $(x_0; y_0)$.

c) $f.g$ es continua en $(x_0; y_0)$.

d) $\dfrac{f}{g}$ es continua en $(x_0; y_0)$, siempre que $g(x_0; y_0) \neq 0$

Teorema 2. Sean $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones reales tales que $Img(f) = R_f \subset \mathbb{R}$. Si f es continua en $(x_0; y_0)$ y g es continua en $f(x_0; y_0)$, entonces la función compuesta $h = g \circ f$ definida por $h(x;y) = g(f(x;y))$ es continua en el punto $(x_0; y_0)$.

Ejemplo 26.

Sea $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{sen(xy)}{xy} & ,, si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 1 & , \ si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$

Pruebe que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Solución

Note que $f(x;y) = (g \circ h)(x;y) = g(h(x;y))$, donde

$$z = h(x;y) = xy \ \text{ y } \ g(z) = \begin{cases} \dfrac{sen\ z}{z} & , si\ z \neq 0 \\ 1 & , \ si\ z = 0 \end{cases}$$

La función h es continua en $(0;0)$ y la función g es continua en $z = 0$, entonces $f = g \circ h$ es continua en $(0;0)$.

Por consiguiente, f es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 27.- Sea $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{y(x-3)}{4y^2 + (x-3)^2} & , si\ (x;y) \neq (3;0) \\ 2 & , \ si\ (x;y) = (3;0) \end{cases}$

a) Determine los puntos donde la función no es continua.

b) Indique el tipo de discontinuidad que presenta f.

Solución

a) i) $f(3;0)=2$

ii) Sean las trayectorias que pasan por el punto (3;0)

$$T_1=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=0\}\ \text{y}\ T_2=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ y=x-3\}$$

Los límites sobre estas trayectorias son:

Sobre T_1: $\lim\limits_{(x;y)\to(3;0)} f(x;y)=\lim\limits_{x\to3} f(x;0)=\lim\limits_{x\to3}(0)=0$

Sobre T_2: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;x-3)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)^2}{5(x-3)^2}=\dfrac{1}{5}$

Luego, por la regla de las dos trayectorias el límite no existe.
Por tanto, f es discontinua en el punto $(3;0)$ de tipo esencial.

Ejemplo 28.- Determine si la función dada es continua en el punto $(0;0)$.

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{15x^2+15y^2+16}-\sqrt{16-x^2-y^2}}{x^2+y^2} & ,si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 2 & ,\ si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Solución

i) $f(0;0)=2$

ii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ es de la forma$0/0$. Al efectuar una racionalización en el numerador, se obtiene:

$$L=\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{\sqrt{15x^2+15y^2+16}-\sqrt{16-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{16(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{15x^2+15y^2+16}+\sqrt{16-x^2-y^2}}=\frac{16}{8}=2$$

Como $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)=2=f(0;0)$, entonces f es continua en $(0;0)$.

Ejemplo 29.- Dada la función $f(x;y)=\ln(4x^2+9y^2-36)$. Halle el conjunto donde f es continua.

Solución

La función f es continua en el conjunto

$$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 4x^2+9y^2-36>0\}=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1\right\}$$

que corresponde al exterior de la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

EJERCICIOS

1.- En los siguientes ejercicios, determine los puntos en los que la función es discontinua.

a) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{|x|+|y|} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ $R.$ Discontinua en $(0;0)$

b) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3+4y^3}{x^2+y^2} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ R. Continua en todo $\mathbb{R}^2$

c) $f(x;y) = \begin{cases} y\ sen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ R. Continua en todo $\mathbb{R}^2$

d) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ R. Continua en todo $\mathbb{R}^2$

e) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\ sen\ (x^2+y^2)}{x^2+y^2} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 1 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ R. Discontinua en $(0;0)$

f) $f(x;y) = \begin{cases} 8\ \text{arccot}\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 4\pi & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ R. Continua en $\mathbb{R}^2$

g) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{x^2+y^2}{\ln 2}}-1}{x^2+y^2} + \dfrac{\cos x}{1+x^2} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 2 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ R. Continua en $\mathbb{R}^2$

h) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x^2+y^2)+\ln(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$

R. Discontinua en $(0;0)$

i) $f(x;y) = \begin{cases} y^2\ \ln(x^2+y^2) & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$ R. Continua en $\mathbb{R}^2$

j) $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(2x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \dfrac{x^2+y^2-2}{x^2+y^2+2} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 3 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$

R. Continua en $\mathbb{R}^2$

2.- Determine el conjunto en el que las siguientes funciones son continuas

a) $f(x;y)=\dfrac{3xy}{x^2+y^2-4}$ b) $f(x;y)=\arccos(y-x^2)$

c) $f(x;y)=\ln(16-y^2+x^2)$ d) $f(x;y)=\dfrac{x^4+y^4}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$

e) $f(x;y)=\ln(4-x^2-y^2)-\ln(x^2+y^2-1)$

f) $f(x;y)=\dfrac{sen\,(xy)}{e^x-y^2}$ g) $f(x;y)=\text{arcsen}(x^2+y^2)$

EJERCICIOS DE REPASO DE LIMITES Y CONTINUIDAD

1.- Calcule los siguientes límites, en caso existan

a) $\lim\limits_{(x;y)\to(1;-2)}\dfrac{x^2y^2+2x^2y-xy^2-xy+2x-y-2}{x^2y+xy^2+2x-y^2+3xy+2x-4y-4}$ $R.-1$

b) $\lim\limits_{(x;y)\to(3;-3)}\dfrac{x^3+y^3}{\sqrt{x+y}}$ $R.0$ c) $\lim\limits_{(x;y)\to(2;1)}\dfrac{\sqrt{xy-2}+x^3y^3-8}{\sqrt{x^2y^2-4}}$ $R.1/2$

d) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{1}{xy}\left(\dfrac{1}{1-xy}-\dfrac{1}{1+xy+x^2y^2}\right)$ $R.2$

e) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{x^3\,sen\,(y^2-9)}{(y+3)sen\,(x^2)}$ $R.0$ f) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{e^{x^2y^2}-1}{sen\,(x^2)\ln(1+y^2)}$ $R.1$

g) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{x\,sen\,(xy)}{1-e^{x^2+y^2}}$ $R.0$ h) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{\ln(1+xy^2)}{\tan x\,(1-\cos(x^2+y^2))}$ $R.0$

2.- Estudie la continuidad de las siguientes funciones

a) $f(x;y)=\dfrac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}$ R. continua en $D=\mathbb{R}^2-\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/x=\pm 2y\}$

b) $f(x;y)=y\cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ $R.$ $\mathbb{R}^2-\{(0;0)\}$

c) $f(x;y)=\dfrac{x^2+y^2}{\ln(4-x^2-y^2)}$

R. continua en $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2<4\}$

d) $f(x;y)=\dfrac{y^3+\ln x}{(x-4)^3+y^6}$

R. continua en $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\;x>0\wedge x\neq 4-y^2\}$

e) $f(x;y)=\dfrac{x^3+\ln(y+1)}{(y+1)^3+x^6}$ R. continua en $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y>-1\}$

3.- Analice la continuidad de las siguientes funciones en el punto (0; 0).

$$\text{a) } f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0\quad , & si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

$$\text{b) } f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\,sen\,(y^2-16)}{(y-4)sen\,x}, & si\ (x;y)\neq(0;4)\\ 0\quad , & si\ (x;y)=(0;4)\end{cases}$$

$$\text{c) } f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{sen^2x}{x^2+y^2}, & si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0\quad , & si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

$$\text{d) } f(x;y)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0\quad , & si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

4.- Demuestre que $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{5|x|+7|y|}{7x^2+9y^2}=+\infty$

Solución: Usando coordenadas polares, se tiene

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}\frac{5|x|+7|y|}{7x^2+9y^2}=\lim_{r\to0}\frac{|r|[5|\cos\theta|+7|sen\,\theta|]}{r^2(7cos^2\theta+9sen^2\theta)}$$

$$=\lim_{r\to0}\frac{5|\cos\theta|+7|sen\,\theta|}{|r|(7cos^2\theta+9sen^2\theta)}=+\infty$$

5.- Analice la continuidad de la función en (0; 10)

$$f(x;y)=\frac{\ln(y-(0.25)^x-4)}{\sqrt{y-4^x-4}}+4\sqrt{\frac{10-y}{x^2+y^2+4}}\qquad R.\text{ es continua.}$$

6.- Analice la continuidad de f en el punto (0; 0).

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3}, & si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0\quad , & si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

3 DERIVADAS PARCIALES

3.1 DERIVADA PARCIAL DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

En *Tópicos de Cálculo Vol. I* , hemos visto que para estudiar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto y para medir la rapidez de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente, era necesario emplear la derivada de la función f. En este capítulo veremos cómo esas ideas se generalizan a funciones de varias variables.

Definición 1.- Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables con dominio en el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Las derivadas parciales de primer orden de f con respecto a las variables independientes x e y, en cualquier punto $(x; y) \in D$, son las funciones dadas por

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = f_x(x;y) = D_1 f(x;y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h;y) - f(x;y)}{h}$$

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = f_y(x;y) = D_2 f(x;y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x+h;y) - f(x;y)}{k},$$

si estos límites existen.

Los límites en esta definición son en una variable, por lo cual para calcularlos se puede usar las técnicas aprendidas en *Tópicos de Cálculo Vol. I*, sobre racionalización, regla de L´Hospital, etc.

Puesto que la derivada parcial de una función de dos variables es la derivada ordinaria de la función que se obtiene al fijar constante una de las variables x o y, su cálculo se realiza de la misma manera y usando las mismas reglas que se utilizan para las funciones de una variable real.

Observación 1.- Cuando queremos definir la derivada de f en un punto particular $(x_0; y_0) \in D$, simplemente reemplazamos $(x; y)$ por $(x_0; y_0)$ en la definición.

Ejemplo 1.- Dada la función $f(x;y) = 3x^2y + x + y$. Usando la definición de derivada parcial calcule $f_x(1;1)$ y $f_y(-1;1)$.

Solución

$$f_x(1;1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h;1)-f(1;1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(1+h)^2+h+2]-5}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3h+7)}{h} = 7$$

$$f_y(-1;1) = \lim_{k\to 0}\frac{f(-1;1+k)-f(-1;1)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{[3(1+k)+k]-3}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{4k}{k} = 4$$

Definición 2.- Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables con dominio el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $z = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$

Las derivadas parciales de primer orden de f con respecto a las variables $x_1; x_2; \dots; x_n$ en cualquier punto $(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ son las funciones de n variables dadas por:

$$\frac{\partial f(x_1;\dots;x_n)}{\partial x_i} = f_{x_i}(x_1;\dots;x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1;\dots x_i+h;\dots;x_n)-f(x_1;\dots;x_n)}{h}$$

si estos límites existen para $i = 1,2,\dots,n$.

La derivada parcial de una función de n variables es su derivada de f respecto a una de sus variables independientes y mantiene a las otras como constantes.

Ejemplo 2.- Halle las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = x^3 - 2x^2y^2 + 3$ b) $g(x;y) = e^{x^2-y^2} + \ln(x^2+y^2-4)$

c) $h(x;y;z) = 2\cos(xy^2) + \tan(yz) - \ln(x^2-4y) + \sqrt{xyz}$

d) $f(x;y;z) = \int_x^z e^{t^2}dt + \int_{-y}^x \cos(t^2)dt + \arctan(xyz) + 8$

Solución

a) Al derivar f con respecto a x manteniendo constante y, se tiene

$$f_x(x;y) = 3x^2 - 4xy^2$$

Al derivar f con respecto a y manteniendo constante x, se obtiene

$$f_y(x;y) = -4x^2y$$

b) Al derivar g con respecto a x manteniendo constante y, resulta

$$g_x(x;y) = e^{x^2-y^2}.2x + \frac{2x}{x^2+y^2-4} = 2xe^{x^2-y^2} + \frac{2x}{x^2+y^2-4}$$

Al derivar g con respecto a y manteniendo contante x, se obtiene

$$g_y(x;y) = e^{x^2-y^2}(-2y) + \frac{2y}{x^2+y^2-4} = -2ye^{x^2-y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2-4}$$

c) Al derivar h con respecto a x manteniendo constante y y z, resulta

$$h_x(x;y;z) = -2\ sen\ (xy^2)(y^2) - \frac{2x}{x^2-4y} + \frac{yz}{2\sqrt{xyz}}$$

$$= -2y^2\ sen\ (xy^2) - \frac{2x}{x^2-4y} + \frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}}$$

Las derivadas parciales de h con respecto a y y z son:

$$h_y(x;y;z) = -2\ sen\ (xy^2)(2xy) + sec^2(yz)(z) - \frac{-4}{x^2-4y} + \frac{xz}{2\sqrt{xyz}}$$

$$= -9xy\ sen\ (xy^2) + z\ sec^2(yz) + \frac{4}{x^2-4y} + \frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}}$$

$$h_z(x;y;z) = sec^2(yz)(y) + \frac{xy}{2\sqrt{xyz}} = y\ sec^2(yz) + \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}}$$

d) Las derivadas parciales de f con respecto a x, y y z son:

$$f_x(x;y;z) = -e^{x^2} + z\cos(x^2) + \frac{yz}{1+x^2y^2z^2}$$

$$f_y(x;y;z) = z\cos(y^2) + \frac{xz}{1+x^2y^2z^2}$$

$$f_z(x;y;z) = e^{z^2} + \int_{-y}^{x}\cos(t^2)\,dt + \frac{xy}{1+x^2y^2z^2}$$

Ejemplo 3.- *Sea* $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0, & si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$

Halle $f_x(0;0)$ y $f_y(0;0)$ si es que existe.

Solución

i) Para $y \neq 0$, se tiene

$$f_x(0;y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h;y)-f(0;y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{hy(h^2-y^2)}{h^2+y^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{hy(h^2 - y^2)}{h(h^2 + y^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{y(h^2 - y^2)}{h^2 + y^2} = -y$$

Luego, para $y = 0$ resulta $f_x(0; 0) = 0$

ii) Para $x \neq 0$, se tiene

$$f_y(x; 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x; 0 + h) - f(x; 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{xh(x^2 - h^2)}{x^2 + h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{xh(x^2 - h^2)}{h(x^2 + h^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{x(x^2 - h^2)}{x^2 + h^2} = x$$

Luego, para $x = 0$ se obtiene $f_y(0; 0) = 0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea $z = f(x; y)$ una función de dos variables con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $f_x(x_0; y_0)$ y $f_y(x_0; y_0)$ existen para $(x_0; y_0) \in D$.
Si $y = y_0$ (plano paralelo al plano XZ), entonces $\mathscr{C}_1: z = f(x; y_0)$ representa la curva formada por la intersección de la superficie $z = f(x; y)$ con el plano $y = y_0$, como se muestra en la figura 3.1.

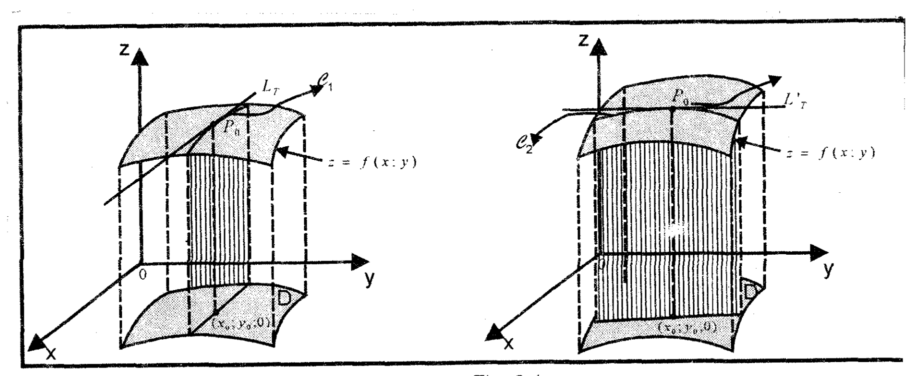


Fig. 3.1

Por tanto,

$$f_x(x_0; y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h} = m_T$$

representa la pendiente de la recta tangente (L_T) a lá curva $\mathscr{C}_1$ en el punto $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$. (Fig. 3.1)

La ecuación cartesiana de la recta tangente L_T en el punto $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ es

$$L_T: z - z_0 = f_x(x_0; y_0)(x - x_0) \wedge y = y_0 \qquad (z_0 = f(x_0; y_0))$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{1} = \frac{z - z_0}{f_x(x_0; y_0)} \wedge y = y_0$$

La forma vectorial de la ecuación de la recta tangente L_T es

$$L_T: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + t(1; 0; f_x(x_0; y_0)), \quad t \in \mathbb{R}$$

y su forma paramétrica

$$L_T: \begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 \\ z = z_0 + t\, f_x(x_0; y_0) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

donde su vector dirección es $\vec{a} = (1; 0; f_x(x_0; y_0))$

De forma similar,

$$f_y(x_0; y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + k) - f(x_0; y_0)}{k}$$

representa la pendiente de la recta tangente (L'_T) a la curva $\mathcal{C}_2$ (obtenida por la intersección de la superficie $z = f(x; y)$ con el plano $x = x_0$) en el punto $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$.

La ecuación cartesiana de esta recta tangente L'_T es

$$L'_T: z - z_0 = f_y(x_0; y_0)(y - y_0) \wedge x = x_0$$

$$\Leftrightarrow L'_T: \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{f_y(x_0; y_0)} \wedge x = x_0$$

La forma vectorial de la ecuación de L'_T es

$$L'_T: (x; y; z) = (x_0; y_0; z_0) + s(0; 1; f_y(x_0; y_0)), \quad s \in \mathbb{R}$$

y su forma paramétrica es

$$L'_T: \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + s \\ z = z_0 + s\, f_y(x_0; y_0) \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

donde $\vec{b} = (0; 1; f_y(x_0; y_0))$ es su vector dirección.

Observación 2.- Los valores de $f_x(x; y)$ y $f_y(x; y)$ en el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ de la superficie $z = f(x; y)$ denotan la pendiente de la superficie en las direcciones de los ejes X e Y respectivamente.

PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

Definición 3.- La ecuación general del plano tangente a la superficie $z = f(x;y)$ en el punto $P_0(x_0;y_0;z_0)$ $(z_0 = f(x_0);y_0))$ con vector normal

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0;y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0;y_0) \end{vmatrix} = (-f_x(x_0;y_0); -f_y(x_0;y_0); 1)$$

$$= -(f_x(x_0;y_0); f_y(x_0;y_0); -1)$$

es

$$P_T: f_x(x_0;y_0)(x - x_0) + f_y(x_0;y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Definición 4.- La recta normal a la superficie $z = f(x;y)$ en el punto $P_0(x_0;y_0;z_0)$ es la recta que tiene la dirección del vector normal del plano tangente a la superficie en P_0; su ecuación vectorial es

$$L_N: (x;y;z) = (x_0;y_0;z_0) + t\big(f_x(x_0;y_0); f_y(x_0;y_0); -1\big), t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 4.- Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = f(x;y) = \sqrt{64 - 5x^2 - 7y^2}$ y el plano $x = -2$, en el punto $P_0(-2;2;4)$.

Solución

Al derivar f con respecto a y manteniendo x constante $(x = -2)$, se obtiene

$$f_y(x;y) = \frac{-14y}{2\sqrt{64 - 5x^2 - 7y^2}} = -\frac{7y}{\sqrt{64 - 5x^2 - 7y^2}}$$

Luego, la pendiente de la recta tangente a la superficie en el punto P_0 es

$$m_T = f_y(-2;2) = -\frac{14}{\sqrt{16}} = -\frac{7}{2}$$

Por consiguiente, la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = f(x;y)$ con el plano $x = -2$ es

$$L_T: (x;y;z) = (-2;2;4) + t\left(0;1;-\frac{7}{2}\right), t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 5.- Una recta tangente trazada a la superficie

$$f(x;y) = e^{x\,sen\,(6\pi y)} - 2x^3 - \operatorname{arccot}(xy) - \frac{xy}{1 + x^2}$$

en un punto donde $y = 1$ está en un plano paralelo al plano YZ y tiene pendiente -12π. Encuentre la ecuación del plano.

Solución

Como

$$f_y(x;y) = e^{x\,sen\,(6\pi y)}.\,x\cos(6\pi y)(6\pi) + \frac{x}{1+x^2y^2} - \frac{x}{1+x^2},$$

entonces la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = f(x;y)$ con el plano paralelo al plano YZ ($x = x_0$), en el punto $P_0(x_0; 1; f(x_0; 1))$ es

$$m_T = f_y(x_0; 1) = 6\pi x_0 + \frac{x_0}{1+x_0^2} - \frac{x_0}{1+x_0^2} = 6\pi x_0$$

Dado que la pendiente de la recta tangente es -12π, entonces

$$m_T = 6\pi x_0 = -12\pi \Longrightarrow x_0 = -2$$

Por tanto, la ecuación del plano paralelo al plano YZ es

$$P: x = -2$$

Ejemplo 6.- Encuentre los puntos de la superficie $f(x;y) = xy(1-x-y)$ donde el plano tangente es paralelo al plano coordenado XY.

Solución

Como el plano tangente es paralelo al plano XY, entonces su vector normal es paralelo al vector $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Luego, se tiene

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = y(1-2x-y) = . \qquad \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = x(1-x-2y) = 0$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneas encontramos que los puntos donde se anulan las derivadas parciales son $(0;0), (1/3; 1/3), (1;0)$ y $(0;1)$. Luego, hay cuatro planos tangentes horizontales a la superficie en los puntos

$$(0;0;0), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{27}\right), (1;0;0) \text{ y } (0;1;0)$$

Ejemplo 7.- Considere el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$

a) Encuentre el plano tangente al hiperboloide en el punto $A(-6; 2; \sqrt{28})$

b) Halle la ecuación vectorial de la recta normal al hiperboloide en el punto $A(-6; 2; \sqrt{28})$.

c) Determine los puntos sobre el hiperboloide en donde los planos tangentes son paralelos al plano $Q: 2x + y + z = 0$.

Solución

a) De la ecuación del hiperboloide, se obtiene

$$z = f(x;y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 4}$$

Como las derivadas parciales de f con respecto a x e y son

$$f_x(x;y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}, \qquad f_y(x;y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2 - 4}}$$

entonces

$$f_x(-6;2) = \frac{-3}{\sqrt{7}} \text{ y } f_y(-6;2) = \frac{-1}{\sqrt{7}}$$

Luego, la ecuación del plano tangente al hiperboloide es

$$P_T: -\frac{3}{\sqrt{7}}(x+6) - \frac{1}{\sqrt{7}}(y-2) - \left(z - \sqrt{28}\right) = 0 \Leftrightarrow P_T: 3x + y + \sqrt{7}z + 2 = 0$$

b) La ecuación vectorial de la recta normal al hiperboloide en el punto A es

$$L_N: (x;y;z) = \left(-6;2;\sqrt{28}\right) + t\left(3;1;\sqrt{7}\right), t \in \mathbb{R}$$

c) El vector normal del plano tangente al hiperboloide en el punto $P_0(x_0;y_0;z_0)$ es

$$\vec{N} = \left(f_x(x_0;y_0); f_y(x_0;y_0); -1\right) = \left(\pm\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - y_0^2 - 4}}; \mp\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 - y_0^2 - 4}}; -1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_0^2 - y_0^2 - 4}}\left(\pm x_0; \mp y_0; -\sqrt{x_0^2 - y_0^2 - 4}\right)$$

El vector normal del plano Q es $\overrightarrow{N_Q} = (2;1;1)$

Como el plano tangente es paralelo al plano Q, entonces sus normales son paralelos. Luego, se tiene

$$\vec{N} \times \overrightarrow{N_Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pm x_0 & \mp y_0 & -\sqrt{x_0^2 - y_0^2 - 4} \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\pm y_0 + \sqrt{x_0^2 - y_0^2 - 4}; \pm x_0 - 2\sqrt{x_0^2 - y_0^2 - 4}; \pm x_0 \pm 2y_0\right)$$

$$= (0;0;0)$$

Al resolver la igualdad, se obtiene $x_0 = \mp 2y_0$, $y_0 = \pm\sqrt{2}$

Luego, los puntos del hiperboloide donde el plano tangente es paralelo al plano Q son: $B(-2\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2})$ y $C(2\sqrt{2};-\sqrt{2};-\sqrt{2})$

Ejemplo 8.- Demuestre que el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en en un punto $(x_0;y_0;z_0)$ tiene por ecuación $Q: \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$

Solución

Primero consideremos la parte superior del elipsoide, es decir $z > 0$

$$z = f(x; y) = c\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Luego, se tiene

$$f_x(x; y) = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \qquad f_y(x; y) = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$$

La ecuación del plano tangente a la elipsoide en el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ $(z_0 > 0)$ es P_T: $f_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$

$$\Leftrightarrow P_T: -\frac{c^2 x_0}{a^2 z_0}(x - x_0) - \frac{c^2 y_0}{b^2 z_0}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_T: \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

Ejemplo 9.- Halle la pendiente de la recta tangente al paraboloide $z = f(x; y) = x^2 + 8y^2$ en el punto $A(2; 1; 12)$, en las direcciones de los ejes X e Y respectivamente.

Solución

i) En la dirección del eje X, la pendiente de la recta tangente es

$$f_x(x; y) = 2x$$

En el punto $A(2; 1; 12)$, la pendiente de la recta tangente en la dirección del eje X es

$$f_x(2; 1) = 4$$

ii) En la dirección del eje Y, la pendiente de la recta tangente al paraboloide es

$$f_y(x; y) = 16y$$

Luego, la pendiente de la recta tangente en el punto $A(2; 1; 12)$ es

$$f_y(2; 1) = 16$$

INTERPRETACIÓN DE LAS DERIVADAS PARCIALES COMO RAZÓN DE CAMBIO

Sea $z = f(x; y)$ una función de dos variables con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que $f_x(x; y)$ y $f_y(x; y)$ existen $\forall(x; y) \in D$. Entonces se tiene:

a) $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ mide la razón de cambio de la variable dependiente z con respecto a la variable independiente x, dejando la variable y constante (o fija).

b) $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ mide la razón de cambio de z con respecto a y, dejando la variable x constante (o fija).

Ejemplo 10.- Suponga que una placa metálica delgada de forma rectangular se calienta irregularmente, de forma tal que la temperatura en cualquier punto $(x; y)$ de la placa es

$$T(x; y) = 4x^2y + y$$

Además, suponga que x e y están medidas en metros y la temperatura T en grados lsius. ¿Cómo varía la temperatura T en el punto $(2; 3)$ cuando y permanece fijo en $y = 3$? ¿Qué significa esto?

Solución

Cuando y permanece fijo, la derivada parcial de T con respecto a x es

$$T_x(x; y) = 8xy$$

Luego, la rapidez de cambio de la temperatura T en el punto $(2; 3)$ es

$$T_x(2; 3) = 48°\text{C}/m$$

Por consiguiente, cuando $y = 3$ (constante) y $x = 2$, la temperatura de la placa aumenta a razón de 8°C por cada metro de aumento en x.

Ejemplo 11.- Se construye una caja rectangular cerrada de manera que su volumen sea 36 pies cúbicos. El costo del material de la tapa y de la base es de S/. 10 el pie cuadrado, el del material para las partes de enfrente y de atrás es de S/. 9 el pie cuadrado y el material para los otros lados es de S/.7 el pie cuadrado.

a) Determine la función de costo $C(x; y)$, donde x e y son las medidas del largo y el ancho de la base de la caja respectivamente.

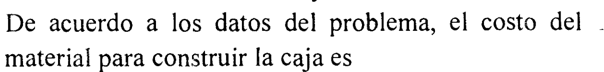
b) Calcule $C_x(3; 4)$ y $C_y(3; 4)$ e interprete los resultados.

z
y
x

Solución

a) El volumen de la caja rectangular es

$$V = xyz = 36 \Longrightarrow z = \frac{36}{xy}$$



De acuerdo a los datos del problema, el costo del material para construir la caja es

$$C = 10(2xy) + 9(2xz) + 7(2yz) = 20xy + 18xz + 14yz$$

Al reemplazar la expresión de z en el costo C, se obtiene

$$C(x; y) = 20xy + 18x\left(\frac{36}{xy}\right) + 14y\left(\frac{36}{xy}\right) = 20xy + \frac{648}{y} + \frac{504}{x}, x, y > 0$$

b) Las derivadas parciales de C con respecto a x e y son

$$C_x(x; y) = 20y - \frac{504}{x^2} \quad \text{y} \quad C_y(x; y) = 20x - \frac{648}{y^2}$$

Luego,

$$C_x(3; 4) = 80 - \frac{504}{9} = 80 - 56 = 24, \qquad C_y(3; 4) = 60 - 40{,}5 = 19{,}5$$

Por tanto, cuando el lado de la base de la caja de medida x es 3 pies y el lado de medida y se mantiene constante en 4 pies, el costo de construcción de la caja aumenta a una razón de S/. 24 por cada pie de aumento en x.

De manera similar, cuando el lado de la base de medida y es 4 pies y el lado de medida x se mantiene constante en 3 pies, el costo de construcción aumenta a una razón de S/. 19,5 por cada pie de aumento en y.

Ejemplo 12.- Se lanza un nuevo producto al mercado. El volumen de ventas V del producto se incrementa como una función del tiempo t medida en meses y de la cantidad de c nuevos soles gastada en la campaña publicitaria que está dada por

$$V = V(t;c) = 400(6 - e^{-0{,}002c})(1 - e^{-t})$$

Calcule $V_t(1;500)$ y $V_c(1;500)$ e interprete el resultado.

Solución

$$V_t(t;c) = 100(6 - e^{-0{,}002c})(e^{-t}) \text{ y } V_c(t;c) = 0{,}8e^{-0{,}002c}(1 - e^{-t})$$

Luego, se tiene

$$V_t(1;500) = 100(6 - e^{-1})(e^{-1}) = 207{,}194$$

$$V_c(1;500) = 0{,}8e^{-1}(1 - e^{-1}) = 0{,}186$$

Luego, $V_t(1;500) = 207{,}194$ significa que después de un mes ($t = 1$) de haber lanzado el producto al mercado y mantener constante el gasto en publicidad en S/. 500, el volumen de ventas aumenta a una razón de S/. 207,194 en cada mes.

Similarmente, $V_c(1;500) = 0{,}186$ significa que cuando se ha gastado S/. 500 en publicidad en un mes ($t = 1$ fijo), el volumen de ventas aumenta a una razón de S/. 0,186 por cada sol de aumento en publicidad.

Ejemplo 13.- Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección del paraboloide $z = 12 - x^2 - y^2$ con el plano $x = 2$.

a) Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $A(2;2;4)$

b) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie

$$z = f(x;y) = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} \text{ que es perpendicular a la recta tangente obtenida en a).}$$

Solución

a) Al parametrizar la curva $\mathcal{C}$ en términos de $y = t$, se tiene

$$\mathcal{C}: \alpha(t) = (2;t;8 - t^2)$$

Así, para $t = 2$, se obtiene el punto $A(2;2;4)$

Luego, se tiene

$$\alpha'(t) = (0;1;-2t) \text{ y } \alpha'(2) = (0;1;-4)$$

Por consiguiente, la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto A es

$$L_T: (x; y; z) = (2; 2; 4) + s(0; 1; -4), s \in \mathbb{R}$$

b) Como $f_x(x; y) = \dfrac{x}{3}$ y $f_y(x; y) = \dfrac{y}{4}$, entonces el vector normal del plano tangente a la superficie $z = f(x; y)$ en el punto $P_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ es

$$\vec{N} = \left(f_x(x_0; y_0); f_y(x_0; y_0); -1\right) = \left(\frac{x_0}{3}; \frac{y_0}{4}; -1\right)$$

Puesto que los vectores $\vec{N}$ y $\vec{a} = (0; 1; -4)$ (vector dirección de L_T) son paralelos, entonces se tiene

$$\vec{N} = k\vec{a} \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{3}; \frac{y_0}{4}; -1\right) = k(0; 1; -4) \Leftrightarrow x_0 = 0, y_0 = 1$$

Por consiguiente, la ecuación general del plano tangente a la superficie en el punto $P_0\left(0; 1; \dfrac{1}{8}\right)$ con vector normal $\vec{N} = \left(0; \dfrac{1}{4}; -1\right)$ es

$$P_T: 0(x - 0) + \frac{1}{4}(y - 1) - \left(z - \frac{1}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow P_T: 2y - 8z - 1 = 0$$

Observación 3.- (Continuidad y Derivabilidad Parcial). La existencia de las derivadas parciales de una función en un punto no garantiza la continuidad de la función en dicho punto. Por ejemplo, para la función

$$f(x; y) = \begin{cases} \dfrac{12xy}{x^2 + y^2}, & si\ (x; y) \neq (0; 0) \\ 0, & si\ (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

las derivadas parciales con respecto a x e y existen en el punto $P_0(0; 0)$; sin embargo, f no es continua en $(0; 0)$.

La razón por la que una función puede tener derivadas parciales y no ser continua en un punto es debido a que, la existencia de una derivada parcial depende del comportamiento de la función a lo largo de un camino lineal, mientras que la continuidad depende del comportamiento de la función a lo largo de todas las trayectorias que pasan por el punto.

Ejemplo 14.- Dada la función $f(x; y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y - 4)}{x + y}, & si\ x + y \neq 0 \\ 0, & si\ x + y = 0 \end{cases}$

a) Analice la continuidad de f en el punto $A(-4; 4)$

b) Halle $\dfrac{\partial f(-4; 4)}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f(-4; 4)}{\partial y}$, si existen

Solución

a) Sean $T_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = -4\}$ y $T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \; y = 4\}$ dos trayectorias que pasan por el punto A(-4;4). Los límites sobre estas trayectorias son:

$$\text{Sobre } T_1: \lim_{(x;y)\to(-4;4)} f(x;y) = \lim_{y\to 4} f(-4;y) = \lim_{y\to 4} \frac{16(y-4)}{y-4} = 16$$

$$\text{Sobre } T_2: \lim_{(x;y)\to(-4;4)} f(x;y) = \lim_{x\to -4} f(x;4) = \lim_{x\to -4} 0 = 0$$

Por tanto, por la regla de las dos trayectorias, el límite no existe.
Luego, f es discontinua en el punto $A(-4;4)$.

b) Al considerar la definición de la derivada parcial, se tiene:

$$f_x(-4;4) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-4+h;4) - f(-4:4)}{h} = \lim_{h\to 0}(0) = 0$$

$$f_y(-4;4) = \lim_{k\to 0} \frac{f(-4;k+4) - f(-4;4)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{16k}{k} = 16$$

Por tanto, las derivadas parciales de f en el punto $A(-4;4)$ existen.

Ejemplo 15.- Dada la función $f(x;y) = |x^2 - 4x + y^2 - 6y + 4|$, halle los puntos en los cuales $f_y(x;y)$ no existe.

Solución

Al considerar la definición de valor absoluto, se tiene

$$f(x;y) = \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 6y + 4 \,, si\ (x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 9 \\ -(x^2 - 4x + y^2 - 6y + 4), si\ (x-2)^2 + (y-3)^2 < 9 \end{cases}$$

La derivada parcial de f con respecto a y es

$$f_y(x;y) = \begin{cases} 2y - 6 \,, si\ (x-2)^2 + (y-3)^2 > 9 \\ 6 - 2y \,, si\ (x-2)^2 + (y-3)^2 < 9 \end{cases}$$

Ahora, analizamos la existencia de $f_y(x;y)$ en los puntos sobre la circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$.

Sea $P_0(x_0;y_0)$ un punto sobre la circunferencia (Fig. 3.3). Entonces:

$$f_y((x_0;y_0)^-) = \lim_{k\to 0^-} \frac{f(x_0;y_0+k) - f(x_0;y_0)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{-2ky_0 - k^2 + 6k}{k} = 6 - 2y_0$$

$$f_y((x_0;y_0)^+) = \lim_{k\to 0^+} \frac{f(x_0;y_0+k) - f(x_0;y_0)}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{2ky_0 + k^2 - 6k}{k} = 2y_0 - 6$$

Fig 3.3

Por consiguiente, $f_y(x_0; y_0)$ existe si las derivadas parciales laterales son iguales, esto es

$$6 - 2y_0 = 2y_0 - 6$$

De donde resulta $y_0 = 3$. Al sustituir este valor en la ecuación de la circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, se obtiene

$$x_0 = -1 \text{ ó } x_0 = 5$$

Así, $f_y(x_0; y_0)$ existe en los puntos (5;3) y (-1;3). En los demás puntos de la circunferencia $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, $f_y(x; y)$ no existe.

EJERCICIOS

1.- Halle las primeras derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x; y) = x^2\, sen^2 y \quad R.\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\, sen^2 y\,, \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2\, sen\, 2y$

b) $f(x; y) = x^{y^2} \quad R.\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}\,, \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^{y^2}\, 2y\, \ln x$

c) $f(x; y) = x^2 e^{-y} + \ln\left(\dfrac{x^3}{x - \sqrt{y}}\right) + sen^2(\pi x y)$

d) $f(x; y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{x^2}{y}\right) + arcsen\,(xy)$

e) $z = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}\right) \quad R.\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}$

f) $u = e^{x/y} + e^{z/y} + sen\,(2y - z + x)$

g) $f(x; y) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}\right) + arcsen\,\left(\dfrac{x}{1 + y}\right)$

h) $f(x; y) = xy e^{x^2 + y^2} + \ln\left(\dfrac{x - 1}{y - 1}\right)$

i) $f(x; y; z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} + e^{xyz} + \arctan\left(\dfrac{3xy}{z^2}\right)$

j) $f(x; y; z) = x \displaystyle\int_{x^2}^{z^2} \dfrac{1}{1 + cos^2 t}\, dt + yz^3$

k) $f(x; y; z) = (x^2 + y^2 + z^2)\ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) + xz^2 - yx^2 + zy^2$

2.- En los siguientes ejercicios, determine las derivadas parciales indicadas en caso de que existan.

a) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{1+\cos(\pi xy)}{x+y} & ,si\ x+y\neq 0\\ 0 & ,\quad si\ x+y=0\end{cases}$, $f_x(1;-1)$ y $f_y(1;0)$

b) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{y+e^x} & ,si\ y\neq -e^x\\ 0 & ,\quad si\ y=-e^x\end{cases}$, $f_x(0;-1)$ y $f_y(0;1)$

c) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ,si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & ,\quad si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$, $f_x(0;0)$ y $f_y(0;0)$

d) $f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{y^2+x} & ,si\ y^2+x\neq 0\\ 0 & ,\quad si\ y^2+x=0\end{cases}$, $f_x(-1;1)$ y $f_y(-1;1)$

3.- Si $u=\ln(x^2+xy+y^2)$. Pruebe que $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2$

4.- Si $u=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}$, pruebe que $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

5.- Si $u=y^2+\tan(ye^{1/x})$, pruebe que $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y^2$

6.- Si $u=\dfrac{z}{xy+yz+xz}$, pruebe que $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}+u=0$

7.- Si $u=\dfrac{e^{xyz}}{e^x+e^y+e^z}$, pruebe que $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=u(xy+xz+yz-1)$

8.- Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $z=\sqrt{36-4x^2-4y^2}$ y el plano $x=2$ en el punto $Q(2;-1;4)$ R. 1

9.- Una recta tangente trazada a la superficie $z=9-y^2-yx^2$ en un punto en el tercer octante donde $x=-2$ está en el plano paralelo al plano YZ y tiene pendiente -8. Encuentre la ecuación del plano. R. $y=-2$

10.- Una araña camina hacia arriba a lo largo de la curva dada como la intersección de la superficie $z=x^4+xy^3+12$ con el plano $x=1$. En el punto $(1;-2;5)$, salió por la recta tangente. ¿En dónde tocó la araña al plano XZ? R. $(1;0;29)$

11.- Una recta tangente trazada a la superficie

$$z = e^{2y\cos(7\pi x)} + 4y^5 - \arctan(2xy^2) + \frac{2xy^2}{1+y^4}$$

en un punto donde $x = -1/2$ está en el plano paralelo al plano XZ y tiene pendiente 14π. Encuentre la ecuación del plano. R. $y = -1$

12.- La intersección del plano $y = 1$ con la superficie $z = x^3y + 5y^2$ es una curva C. Si se traza la recta tangente a C en el punto donde $x = 1$, halle el punto donde dicha tangente corta al plano $x = 0$. R. $(0; 1; 3)$

13.- Considere una esfera con centro en el origen y radio 13. Una recta tangente trazada a esta esfera en un punto en el primer octante donde $x = 3$ está en el plano paralelo al plano XZ y tiene pendiente $-1/4$. Encuentre la ecuación del plano. R. $y = 4$

14.- En cada uno de los siguientes ejercicios, halle la ecuación del plano tangente y de la recta normal a cada una de las superficies en el punto indicado.

a) $z = 3 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16}$, $P_0\left(2; 2; \frac{83}{36}\right)$ b) $z = x \ln y$, $(1; 1; 0)$

c) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0(1; 1; \sqrt{2})$

d) $z = 3x^2 + y^2 + 2$, $P_0(-1; 2; 9)$ R. $6x - 4y + z + 5 = 0$

e) $z = e^{2x}\cos 3y$, $P_0(1; \pi/3; -e^2)$ R. $2e^2(x-1) + z + e^2 = 0$

f) $z = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $P_0(-3; 4; \ln 5)$

15.- Halle los puntos de la superficie donde el plano tangente es paralelo al plano coordenado XY.

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{1} = 1$ b) $z = x^2y - x^3y + x^2y^2$

c) $z = x^3 - 12xy + 8y^3$ d) $f(x; y) = x^3ye^{y-3x}$

16.- Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $z = 4xy - x^4 - y^4$ que es paralelo al plano $Q: 8x - 8y + z + 28 = 0$ R. $8x - 8y + z - 10 = 0$

17.- Encuentre el ángulo entre la recta $L = \{(-2; 5; 12) + t(4; 1; -3) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$ y la normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 121$ en el punto de intersección de la recta y la esfera $R. \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{26}{22}}$

18.- ¿En qué puntos del gráfico de la ecuación $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 2xy = 12$, son los planos tangentes paralelos al plano XZ? R. $(2; 2; 0)$ y $(-2; -2; 0)$

19.- Halle un vector tangente a la curva de intersección de las superficies $x^2 - 3xz + y^2z = 1$ y $3xy + 2yz + 6 = 0$ en el punto $(1; -2; 0)$.

20.- Demuestre que el plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en un punto $(x_0; y_0; z_0)$ de la esfera $(z_0 > 0)$ tiene por ecuación $xx_0 + yy_0 + zz_0 = 1$

21.- Encuentre las intersecciones con los ejes coordenados de cada plano tangente a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$

22.- Pruebe que el tetraedro acotado por los planos coordenados y cada plano tangente a la superficie $xyz = a^3$ es de volumen constante. $R. V = \frac{9}{2}a^3$

23.- Halle sobre el cilindro $(x + y)^2 + (y - z)^2 = 4$ el lugar geométrico de los puntos en los cuales la normal es paralela al plano XY. R. $y = x, x + y = \pm 2$

24.- Determine el valor de m para que el plano $x - 2y - 2z + m = 0$ sea tangente a la superficie de ecuación $x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144 = 0$

25.- La temperatura T de una placa rectangular está dada por $T(x; y) = 4xy^2(5 - x)(5 - y)$, si $0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 5$. En $(4; 2)$, determine la razón de cambio de T. a) con respecto a x b) con respecto a y.

26.- La función de utilidad $U = f(x; y)$ mide la satisfacción (utilidad) que encuentra una persona al consumir dos productos x e y. Supongamos que $U = 5x^2 - xy + 3y^2$

a) Calcule la utilidad marginal con respecto al producto x $(U_x(x; y))$

b) Determine la utilidad marginal con respecto al producto y $(U_y(x; y))$

c) Cuando $x = 2$ e $y = 3$, una persona ¿debe consumir una unidad más de x o de y para tener más utilidad?

27.- Un fabricante de pistones para autos estima que su producción total en miles de unidades está dada por $P(x; y) = 15x^{2/5}y^{3/5}$, donde "$x$" es el número de unidades de fuerza de trabajo e "y" es el número de unidades de capital utilizado.

a) Encuentre el número de unidades producidas cuando se utilizan 32 unidades de fuerza de trabajo y 7776 unidades de capital.

b) Encuentre e interprete $P_x(32; 7776)$ y $P_y(32; 7776)$.

c) ¿Cuál sería el efecto aproximado sobre la producción de incrementar a 33 unidades de fuerza de trabajo mientras se mantiene el capital en su nivel presente?

d) Suponga que las ventas han sido buenas y la administración quiere incrementar el capital o bien la fuerza de trabajo en una unidad. ¿Qué opción dará un mayor incremento en la producción?.

28.- Después que un nuevo producto se ha lanzado al mercado, su volumen de ventas V (en miles de unidades) está dado por $V = \dfrac{ct + 450}{\sqrt{c + t^2}}$, donde t es el tiempo (en meses) desde que el producto fue introducido por primera vez y c la cantidad (en cientos de nuevos soles) gastada cada mes en publicidad.

a) Calcule $V_t(c; t)$

b) Use el resultado de la parte a) para predecir el número de meses que transcurrirán, antes de que el volumen de ventas empiece a descender, si la cantidad destinada a publicidad se mantiene fija en S/. 9000 por mes.

R. 18 meses

29.- Una compañía que fabrica computadoras ha determinado que su función de producción está dada por $P(x; y) = 500x + 800y + 3x^2y - x^3 - \dfrac{y^4}{4}$, donde x es el tamaño de la fuerza de trabajo (en horas de trabajo por semana) e y es la cantidad de capital (en unidades de S/. 1000) invertido.

Encuentre $P_x(x; y)$ y $P_y(x; y)$ cuando $x = 50$ y $y = 20$ e interprete los resultados.

30.- La función de costo de la empresa SAJITA S.A. que produce dos tipos de productos A y B es $C(x; y) = 50 \ln x + 40 \ln y + 15y^2 + 12x^2$, donde x e y son las cantidades producidas de tipo A y B respectivamente.

a) Encuentre el costo aproximado de producir 50 de tipo A y 20 de tipo B.

b) Halle $C_x(50; 20)$ y $C_y(50; 20)$ e interprete los resultados.

c) Suponga que las ventas de los productos han sido buenas y la empresa quiere incrementar la producción del producto de tipo A o del tipo B en una unidad ¿Qué opción dará el menor costo de producción?

3.2 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Lo mismo que sucede con las derivadas ordinarias de una función de una variable real es posible encontrar derivadas parciales de segundo, tercero, cuarto y en general de orden n de una función de varias variables.

Vamos a empezar por denotar las derivadas parciales de orden superior de una función de dos variables. Luego, se generaliza esta idea para funciones de n variables.

Sea $z = f(x; y)$ una función de dos variables con dominio el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$

Puesto que las derivadas parciales de primer orden de f

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x; y) = D_1 f(x; y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x; y) = D_2 f(x; y)$$

son también funciones de dos variables, entonces las derivadas parciales de estas funciones se llaman derivadas parciales de segundo orden de f.

Estas segundas derivadas de f son cuatro y se denotan por

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x; y) = D_{11} f(x; y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x; y) = D_{22} f(x; y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x; y) = D_{12} f(x; y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{yx}(x; y) = D_{21} f(x; y)$$

Las derivadas parciales $f_{xy}(x; y)$ y $f_{yx}(x; y)$ se conocen como derivadas parciales mixtas o cruzadas de f.

Como las derivadas parciales de segundo orden de $z = f(x; y)$ son funciones de x e y, entonces se puede derivar nuevamente para obtener las derivadas parciales de tercer orden de f y así sucesivamente hasta el orden n.

Ejemplo 15.- Halle las derivadas parciales de segundo orden de $f(x; y) = 2xy^2 - 3x + 3x^2y^2$ y calcule el valor de $f_{xy}(1; -2)$

Solución

Las derivadas parciales de primer orden de f son

$$f_x(x;y) = 2y^2 - 3 + 6xy^2 \text{ y } f_y(x;y) = 4xy + 6x^2y$$

y las derivadas parciales de segundo orden de f son

$$f_{xx}(x;y) = 6y^2 \ , \qquad f_{yy}(x;y) = 4x + 6x^2$$

$$f_{xy}(x;y) = 4y + 12xy \ , \qquad f_{yx}(x;y) = 4y + 12xy$$

Luego,

$$f_{xy}(1:-2) = -8 - 24 = -32$$

Teorema 1.- Si $z = f(x;y)$ es una función continua en un punto $P(x;y)$ y las funciones derivadas parciales $f_x(x;y), f_y(x;y), f_{xy}(x;y)$ y $f_{yx}(x;y)$ están definidas y son continuas en la vecindad del punto P, entonces se cumple:

$$f_{xy}(x;y) = f_y(x;y)$$

Observación 4.- Si la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sus funciones derivadas parciales $D_1f(x;y), D_2f(x;y), D_{12}f(x;y), D_{21}f(x;y), D_{121}f(x;y), D_{211}f(x;y)$ son continuas en el punto $P_0(x_0;y_0)$, entonces se cumple

$$D_{121}f(x_0;y_0) = D_{211}f(x_0;y_0)$$

En seguida vemos cómo estos conceptos de derivadas parciales de orden superior para funciones de dos variables se generalizan a funciones de n variables.
Sea $z = f(x_1;x_2;\dots;x_n)$ una función de n variables con dominio el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$.
Como la derivada parcial de f con respecto a la i-ésima componente
$(i = 1,2,\dots,n)$

$$D_if(x_1;x_2;\dots;x_n) = f_{x_i}(x_1;\dots;x_n) = \frac{\partial f(x_1;\dots;x_n)}{\partial x_i}$$

es una función de n variables, entonces las derivadas parciales de estas funciones se llaman *derivadas parciales de segundo orden* de f y se denotan por

$$D_{ij}f(x_1;\dots;x_n) = f_{x_ix_j}(x_1;\dots;x_n) = \frac{\partial^2 f(x_1;\dots;x_n)}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\forall i = 1;2,\dots;n \, , \qquad \forall j = 1;2,\dots;n$$

Las derivadas parciales de la función $D_{ij}f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con respecto a la k-ésima componente se denominan *derivadas parciales de tercer orden* y se denotan por:

$$D_{ijk}f(x_1;\dots;x_n) = f_{x_ix_jx_k}(x_1;\dots;x_n) = \frac{\partial^2 f(x_1;\dots;x_n)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$$

$\forall i = 1,2, \dots ; n\ ;\ j = 1,2, \dots , n\ ; k = 1,2 \dots , n$

En forma similar, se puede continuar en hallar las derivadas parciales de orden n de f, en caso existan.

Ejemplo 16.- Dada la función $f(x; y; z) = e^{xyz} - e^{-y} \cos(xz)$, halle $f_{xyz}(x; y; z)$ y $f_{zxy}(x; y; z)$.

Solución

Las derivadas parciales de primer orden de f son

$f_x(x; y; z) = yze^{xyz} + ze^{-y}\, sen\ (xz)$ y $f_z(x; y; z) = xye^{xyz} + xe^{-y}\, sen\ (xz)$

Luego, las derivadas parciales de segundo orden de f son:

$$f_{xy}(x; y; z) = ze^{xyz} + xyz^2 e^{xyz} - ze^{-y} sen\ (xz)$$

$$f_{zx}(x; y; z) = ye^{xyz} + xy^2 z e^{xyz} + e^{-y} sen\ (xz) + xze^{-y} \cos(xz)$$

Finalmente, las derivadas parciales de tercer orden de f son:

$$f_{xyz}(x; y; z) = e^{xyz} + 3xyze^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz} - e^{-y} sen(xz) - xze^{-y}\cos(xz)$$

$$f_{zxy}(x; y; z) = e^{xyz} + 3xyze^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz} - e^{-y} sen(xz) - xze^{-y}\cos(xz)$$

EJERCICIOS

1.- Halle todas las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:

a) $z = \ln(x^2 + y^2)$ b) $z = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$

c) $z = u = xy + yz + zx$ d) $f(x; y) = \dfrac{x}{x+y}$

e) $f(x; y) = e^{x/y}$ f) $z = x^2 - 4y + \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - 3\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right), x > 0$

g) $f(x; y) = x\ \ln\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$ h) $z = e^{yx^2} + \ln(\cos(x - y))$

2.- Verifique en cada caso que $D_{12}f(x; y) = D_{21}f(x; y)$.

a) $f(x; y) = x^4 + 4x^3y - 3x^2y^2 + 6xy^3 + 9y^4$

b) $f(x; y) = e^{xy}\, sen\, x \cos y$ c) $f(x; y) = xe^{-y^2} + x \sec y$

d) $f(x; y; z) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1+z}\right) - e^{xy}$

e) $f(x;y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ f) $f(x;y) = xe^{xy}$

3.- Si $f(x;y) = sen\,(5\pi x + y) + \cos(x - 5\pi y)$, calcule $\dfrac{f_{yx}(0;0)}{f_{xx}(0;0)}$

4.- Una función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se llama armónica si satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Pruebe si las siguientes funciones son armónicas

a) $f(x;y) = x^3y - xy^3$ b) $f(x;y) = e^{-x}\,sen\,y$

c) $u = e^x\,sen\,y + \ln(x^2 + y^2) + x^3 - 3xy^2$

d) $u = e^{x^2-y^2}\,sen\,2xy$ e) $f(x;y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

5.- Si $u = A\cos[m(x + at)] + B\,sen\,[n(x - at)]$. Pruebe que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, donde A, B, m, n y a son constantes.

6.- Para la función $u = f(x;y;z)$ la ecuación de Laplace es $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Pruebe que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de Laplace.

a) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ b) $z = e^x\,sen\,y + e^y\,sen\,x$

7.- Si $f(x;y) = (y + ax)^2e^{y+ax}$. Pruebe que $f_{xx} = a^2 f_{yy}$

8.- Si $u = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, pruebe que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

9.- Si $u = e^x + e^y + e^z$, pruebe que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^z\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$

10.- Si $u = e^{x-at}\cos(x - at)$, pruebe que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

11.- Si $u = ye^x + xe^y$, pruebe que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}$

12.- Si $f(x;y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & si\ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$

pruebe que $f_{12}(0;0) = -1$, $f_{21}(0;0) = 1$

13.- Dada la función $F(x;y) = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dx^3$. Determine que relación debe existir entre los coeficientes A, B, C y D para que $F_{xy} - F_{xx}F_{yy}$ sea un cuadrado perfecto.

14.- Dada la función $z = \frac{1}{5}x^5 - 2x^3 + 25x + ax^3y^2 + bxy^4 + cxy^2$

a) Determine los valores de a, b y c de modo que $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ sean iguales y de signos opuestos.

b) Halle los puntos de la superficie representativa de dicha función en los que el plano tangente es horizontal.

15.- Sea la función $f(x;y) = e^{ax+by}\, g(x;y)$. Si $g_x(x;y) = g_y(x;y) = 1$. Halle los valores de las constantes a y b, tales que $f_x(x;y) = f_y(x;y)$ y $1 + f_{xy}(x;y) = a + f_{yx}(x;y)$ R. $a = b = 1$

16.- Sean $g(x;y;z) = \frac{z\sqrt{xy}}{2}$ y $f(x;y;z) = \int_1^{g(x;y;z)} sen\,(t^2)dt$

Halle $\frac{\partial^2 f(2;\pi;1)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(2;\pi;1)}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 f(2;\pi;1)}{\partial z^2}$

$R. -\frac{\sqrt{2\pi}}{32}, -\frac{1}{2}(2\pi)^{-3/2}, 0$

17.- Para k una constante positiva y $g(x;t) = \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{kt}}$, sea

$f(x;t) = \int_0^{g(x;t)} e^{-u^2}\, du$. Pruebe que $\frac{k\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$

18.- Dada la función $f(x;y) = \begin{cases} e^x + e^y + \frac{xy}{x^2+y^2}, & si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 2, & si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$

Halle $\frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f(0;0)}{\partial x \partial y}$ si es que existen.

3.3 DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

En la sección 3.1 hemos determinado la pendiente de la superficie $z = f(x;y)$ en dos direcciones diferentes: en la dirección del eje X (la pendiente estaba dada por la derivada parcial $f_x(x;y)$) y en la dirección del eje Y (la pendiente estaba dada por la derivada parcial $f_y(x;y)$).

En esta sección veremos cómo se puede usar estas dos derivadas parciales para encontrar la pendiente de la superficie $z = f(x;y)$ en una dirección arbitraria.

Definición 5.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables con dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, tales que $D_1 f(x_1; ...; x_n), ..., D_n f(x_1; ...; x_n)$ existen $\forall (x_1; ...; x_n) \in D$.

El gradiente de la función f en el punto $(x_1; ...; x_n) \in D$ es el vector

$$\nabla f(x_1; ...; x_n) = (D_1 f(x_1; ...; x_n)); ...; D_n f(x_1; ...; x_n))$$

donde ∇ es el operador nabla.

Geométricamente, el gradiente $\nabla f(x_1; ...; x_n)$ es un vector normal a una curva o superficie en el espacio en la cual se estudia.

Observación 5.-

i) Si $z = f(x;y)$ es una función de dos variables, tales que $\nabla f(x_0;y_0) = \left(f_x(x_0;y_0); f_y(x_0;y_0)\right) \neq \vec{0}$, entonces $\nabla f(x_0;y_0)$ es un vector normal (ortogonal) a la curva de nivel de f ($\mathcal{C}_N: f(x;y) = c$) que pasa por el punto $P_0(x_0;y_0)$ (Fig. 3.4).

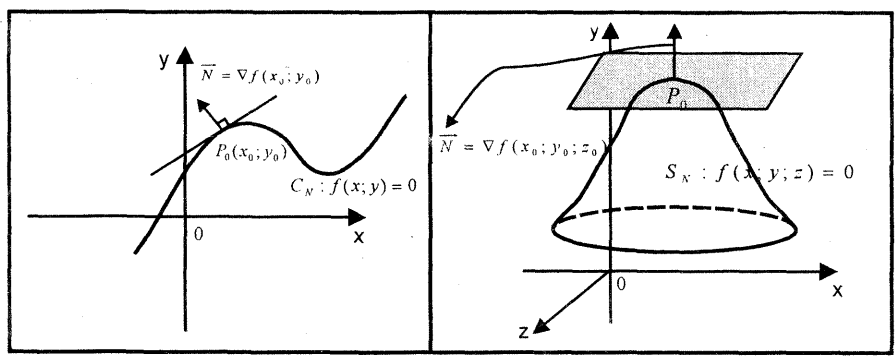


Fig. 3.4 Fig. 3.5

ii) Si $w = f(x;y;z)$ es una función de tres variables tal que

$$\nabla f(x_0;y_0;z_0) = \left(f_x(x_0;y_0;z_0); f_y(x_0;y_0;z_0); f_z(x_0;y_0;z_0)\right) \neq \vec{0},$$

entonces $\nabla f(x_0; y_0; z_0)$ es un vector normal (ortogonal) a la superficie de nivel $(S_N: f(x; y; z) = c)$ que pasa por el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ (Fig. 3.5).

Ejemplo 17.- Halle el vector gradiente de las siguientes funciones
a) $f(x; y) = 8xy - 2x^4 - 2y^4$ b) $g(x; y; z) = \cos(xy) + x^3y^3z^3$

Solución

a) $\nabla f(x; y) = \left(f_x(x; y); f_y(x; y)\right) = (8y - 8x^3; 8x - 8y^3)$

b) $\nabla g(x; y; z) = \left(f_x(x; y; z); f_y(x; y; z); f_z(x; y; z)\right)$

$= (-y\ sen\ (xy) + 3x^2y^3z^3; -x\ sen\ (xy) + 3x^3y^2z^3; 3x^3y^3z^2);$

Ejemplo 18.- Si $f(x; y) = xe^{y^2} - 15\ln(x^2 + y^2 + 16)$, halle $\nabla f(2; 0)$
Solución

$$\nabla f(x; y) = \left(f_x(x; y); f_y(x; y)\right)$$

$$= \left(e^{y^2} - \frac{30x}{x^2 + y^2 + 16}; 2xye^{y^2} - \frac{30y}{x^2 + y^2 + 16}\right)$$

Luego, $\nabla f(2; 0) = (-2; 0)$

Teorema 2.- Sean $f, g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones de n variables, entonces ∇ es un operador que satisface las siguientes propiedades:

1.- $\nabla[f(p) + g(p)] = \nabla f(p) + \nabla g(p), \forall p(x_1; \dots : x_n) \in D$

2.- $\nabla[f(p) - g(p)] = \nabla f(p) - \nabla g(p)$

3.- $\nabla[\lambda\, f(p)] = \lambda\, \nabla f(p)$

4.- $\nabla[f(p)g(p)] = f(p)\nabla g(p) + g(p)\nabla f(p)$

5.- $\nabla\left[\frac{f(p)}{g(p)}\right] = \frac{g(p)\nabla f(p) - f(p)\nabla g(p)}{[g(p)]^2}, si\ g(p) \neq 0$

6.- $\nabla[(f(p))^r] = r[f(p)]^{r-1}\nabla f(p)$

7.- El vector $\nabla f(p)$ indica la dirección de máxima razón de cambio de f en el punto p.

DERIVADA DIRECCIONAL DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Definición 6.-

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables con dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, y sea $\vec{u} = (u_1; u_2)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^2$.

La derivada direccional de f en el punto $(x; y) \in D$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$, es la función de dos variables denotada por

$$D_{\vec{u}}f(x; y) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x; y) + h\vec{u}) - f(x; y)}{h}$$

si este límite existe.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

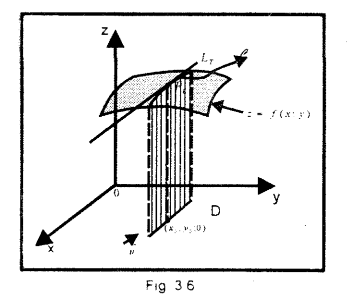


Fig 36

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables ,tal que $D_{\vec{u}}f(x_0; y_0)$ existe para $(x_0; y_0) \in D$ y $\vec{u}$ vector unitario en $\mathbb{R}^2$.

La derivada direccional de f en el punto $(x_0; y_0) \in D$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$, esto es,

$$D_{\vec{u}}f(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0; y_0) + h\vec{u})) - f(x_0; y_0)}{h}$$

representa la pendiente de la recta tangente (L_T) a la curva de intersección de la superficie $z = f(x; y)$ con el plano perpendicular al plano XY que contiene a la recta $L: (x; y; t) = (x_0; y_0; 0) + t(x_0; y_0; 0), t \in \mathbb{R}$

Observación 6.- (Interpretación de la derivada direccional como razón de cambio)

i) La derivada direccional de f en el punto $(x_0; y_0) \in D$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = (u_1; u_2)$, esto es,

$$D_{\vec{u}}f(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0; y_0) + h\vec{u})) - f(x_0; y_0)}{h}$$

mide la razón (o velocidad) de cambio instantáneo del valor de la variable dependiente $z = f(x; y)$ con respecto a la distancia en el plano XY, medida en la dirección del vector unitario $\vec{u}$.

ii) Si la dirección del vector unitario $\vec{u}$ está dado en términos del ángulo que forma este vector con la parte positiva del eje X, esto es, $\vec{u} = (\cos\theta\,; sen\,\theta)$, entonces la derivada direccional de f en cualquier punto $(x; y) \in D$ es dada por

$$D_{\vec{u}}f(x;y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h\cos\theta\,;y+h\,sen\,\theta)-f(x;y)}{h},$$

si este límite existe.

Ejemplo 19.- Sea $f(x;y) = e^{xy} - y^2$. Halle la derivada direccional de f en cualquier punto $(x;y) \in D_f$, en la dirección del vector unitario

$$\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Solución

$$D_{\vec{u}}f(x;y) = \lim_{h\to 0}\frac{f\big((x;y)+h\vec{u}\big)-f(x;y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+\frac{h}{\sqrt{2}};y-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-f(x;y)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[e^{\left(x+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(y-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)}-\left(y-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2\right]-[e^{xy}-y^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{xy}\left[e^{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}y-\frac{h}{\sqrt{2}}x-\frac{h^2}{2}\right)}-1\right]}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\left(y-\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2-y^2}{h}$$

$$= e^{xy}\lim_{h\to 0}\frac{e^{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}y-\frac{h}{\sqrt{2}}x-\frac{h^2}{2}\right)}-1}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{2}-\frac{2h}{\sqrt{2}}y}{h}$$

$$\overset{L'H}{=} e^{xy}\lim_{h\to 0}\frac{e^{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}y-\frac{h}{\sqrt{2}}x-\frac{h^2}{2}\right)}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}-h\right)}{1} - \lim_{h\to 0}\frac{h-\frac{2}{\sqrt{2}}y}{1}$$

$$= e^{xy}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}y$$

Definición 7.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de n variables con dominio el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, y sea $\vec{u} = (u_1; ... ; u_n)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^n$.
La derivada direccional de f en cualquier punto $(x_1; x_2; ... ; x_n) \in D$ en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ es la función de n variables dada por

$$D_{\vec{u}}f(x_1;...;x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f((x_1;...;x_n)+h\vec{u})-f(x_1;...;x_n)}{h},$$

si este límite existe.

Teorema 3.- Sean $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de n variables con dominio D, $\vec{u} = (u_1; \dots; u_n)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^n$ y $\nabla f(P)$ el vector gradiente de f en el punto $P(x_1; \dots; x_n) \in D$, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ es

$$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \bullet \vec{u} = \frac{\partial f(P)}{\partial x_1} u_1 + \frac{\partial f(P)}{\partial x_2} u_2 + \cdots + \frac{\partial f(P)}{\partial x_n} u_n$$

Ejemplo 20.- Calcule la derivada direccional de la función $f(x; y; z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ en el punto $P_0(2; 2; -4)$ en la dirección que va de $P_1(2; 2; -4)$ a $Q_1(3; 1; -5)$

Solución

Un vector en la dirección indicada es

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1 Q_1} = (1; -1; -1)$$

y un vector unitario en la dirección de este vector es

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Como $\nabla f(x; y; z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, entonces el vector gradiente en el punto P_0 es

$$\nabla f(2; 2; -4) = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{3}\right)$$

Por tanto, la derivada direccional de f en el punto P_0 es

$$D_{\vec{u}} f(2; 2; -4) = \nabla f(2; 2; -4) \bullet \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ejemplo 21.- ¿Cuál es el valor del ángulo θ para el cual la derivada direccional de $f(x; y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ en el punto $(1; 2)$ es mínimo y cuál es este valor mínimo?

Solución

Al usar el vector unitario $\vec{u} = (\cos\theta\,; sen\,\theta)$, se tiene

$$g(\theta) = D_{\vec{u}} f(1; 2)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \cos\theta - \frac{1}{\sqrt{5}} sen\,\theta$$

De donde resulta

$$g'(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{5}} sen\,\theta - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\theta \text{ y}$$

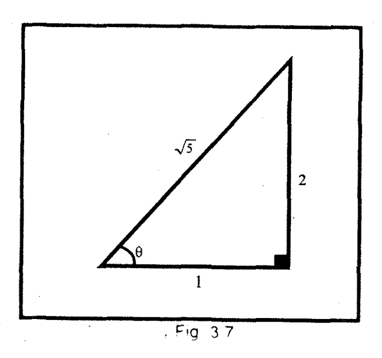


Fig 3 7

$$g''(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{5}}sen\,\theta$$

Al hacer $g'(\theta) = 0$, el punto crítico de g es $\theta = \arctan(2)$

Luego,

$$g''(\arctan(2)) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\cos(\arctan(2)) + \frac{1}{\sqrt{5}}sen\,(\arctan(2)) = \frac{1}{2} > 0$$

Así, $\theta = \arctan(2)$ corresponde a un valor mínimo de g.

Por tanto, el valor mínimo de la derivada direccional de f es

$$D_{\vec{u}}f(1;2) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{2}$$

PROPIEDADES DE LA DERIVADA DIRECCIONAL

Sean $f, g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones reales de n variables, tal que $\nabla f(P)$ y $\Delta g(P)$ existen, $\forall P(x_1; ...; x_n) \in D$, y sea $\vec{u} = (u_1; ...; u_n)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^n$. Entonces se tiene:

a) $D_{\vec{u}}(f \pm g) = D_{\vec{u}}f \pm D_{\vec{u}}g$

b) $D_{\vec{u}}(f.g) = fD_{\vec{u}}g + gD_{\vec{u}}f$

c) $D_{\vec{u}}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gD_{\vec{u}}f - fD_{\vec{u}}g}{g^2}, si\ g(P) \neq 0, \forall P \in D$

d) La dirección del ascenso más rápido de la variable dependiente $z = f(x_1; ...; x_n)$ (o la dirección de máxima razón de cambio de $z = f(P)$) en el punto $P(x_1; ...; x_n) \in D$, se presenta cuando el vector unitario $\vec{u} = (u_1; ...; u_n)$ tiene el mismo sentido que el vector gradiente $\nabla f(x_1; ...; x_n)$. En esta dirección, el valor máximo de la derivada direccional de f es

$$D_{\vec{u}}f(x_1; ...; x_n) = \|\nabla f(x_1; ...; x_n)\|$$

e) La dirección del descenso más rápido de la variable dependiente $z = f(x_1; ...; x_n)$ (o la dirección de decrecimiento más rápido de $z = f(P)$) en el punto $P(x_1; ...; x_n) \in D$, se presenta cuando el vector unitario $\vec{u} = (u_1; ...; u_n)$ tiene el mismo sentido que el vector $-\nabla f(x_1; ...; x_n)$.

En esta dirección, el menor valor de la derivada direccional de f es

$$D_{\vec{u}}f(x_1; ...; x_n) = -\|\nabla f(x_1; ...; x_n)\|$$

De las propiedades d) y e), la derivada direccional de f en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{u}$ del espacio $\mathbb{R}^n$ satisface la desigualdad

$$-\|\nabla f(x_1; \dots; x_n)\| \leq D_{\vec{u}} f(x_1; \dots; x_n) \leq \|\nabla f(x_1; \dots; x_n)\|$$

f) Cualquier dirección $\vec{u} = (u_1; \dots; u_n)$ perpendicular al vector gradiente $\nabla f(x_1; \dots; x_n)$ es una dirección de cambio cero en f, esto es

$$D_{\vec{u}} f(x_1; \dots; x_n) = \nabla f(x_1; \dots; x_n) \bullet \vec{u} = 0$$

g) $D_{-\vec{u}} f(x_1; \dots; x_n) = -D_{\vec{u}} f(x_1; \dots; x_n)$

h) Las relaciones de las derivadas parciales de la función $z = f(x; y)$ con la derivada direccional de f son:
$D_{\vec{i}} f(x; y) = \nabla f(x; y) \bullet \vec{i} = f_x(x; y)$ $(\vec{i} = (1; 0))$
$D_{\vec{j}} f(x; y) = \nabla f(x; y) \bullet \vec{j} = f_y(x; y)$ $(\vec{j} = (0; -1))$

Ejemplo 22.- La distribución de la temperatura sobre una placa metálica viene dada por la función

$$T(x; y) = 10\left(xe^{-y^2} + ye^{-(x-2)^2}\right)$$

Si una mosca se sitúa en el punto $P_0(2; 0)$, se pide:

a) Determinar la razón de cambio de la temperatura al desplazarse hacia el punto $Q_0(2; 2)$.
b) ¿En qué dirección desde el punto P_0 debe moverse la mosca para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible?. Si sigue esta dirección, ¿cuál es la rapidez de cambio de la temperatura?
c) ¿En qué dirección desde el punto P_0 debe moverse la mosca para que la temperatura aumente lo más rápidamente posible?. Si sigue esta dirección, ¿cuál es la rapidez de cambio de la temperatura?
d) Si la mosca no quisiera apreciar ningún cambio de temperatura, ¿qué dirección debe tomar?

Solución

a) Un vector en la dirección de P_0 hacia Q_0 es

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_0 Q_0} = (0; 2)$$

y un vector unitario en la dirección de este vector es

$$\vec{u}_{\vec{b}} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = (0; 1)$$

Como $\nabla T(x; y) = \left(10(e^{-y^2} - 2y(x-2)e^{-(x-2)^2}); 10(-2xye^{-y^2} + e^{-(x-2)^2})\right)$, entonces el vector gradiente de T en P_0 es

$$\nabla T(2; 0) = (10; 10)$$

Luego, la razón de cambio de la temperatura al moverse en la dirección del vector $\vec{b}$ es

$$D_{\vec{u}_{\vec{b}}}T(2;0) = \nabla T(2;0) \bullet \vec{u}_{\vec{b}} = 10$$

b) Para que la temperatura disminuya lo más rápido posible, la mosca debe moverse en la dirección del vector

$$-\nabla T(2;0) = (-10;-10)$$

En esta dirección, la rapidez de cambio de la temperatura es

$$\left|D_{\vec{u}_{\nabla T}}T(2;0)\right| = |-\|\nabla T(2;0)\|| = \left|-10\sqrt{2}\right| = 10\sqrt{2}$$

c) Para que la temperatura aumente lo más rápido posible, la mosca debe moverse en la dirección del vector

$$\nabla T(2;0) = (10;10)$$

En esta dirección, la rapidez de cambio de la temperatura es

$$\left|D_{\vec{u}_{\nabla t}}T(2;0)\right| = |\|\nabla T(2;0)\|| = \left|10\sqrt{2}\right| = 10\sqrt{2}$$

d) Para que no haya cambio en la temperatura, se busca el vector unitario $\vec{u} = (u_1;u_2)$, tal que

$$\begin{cases} \nabla T(2;0) \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 10u_1 + 10u_2 = 0 & \ldots \quad (1) \\ \|\vec{u}\| = 1 \qquad\qquad \Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 = 1 & \ldots \quad (2) \end{cases}$$

Al resolver las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ó } \vec{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Por tanto, la mosca debe tomar una de las direcciones $\vec{u}_1$ o $\vec{u}_2$ para no tener ningún cambio en la temperatura de la placa.

Ejemplo 23.- La altura de una montaña sobre el nivel del mar es dada por la ecuación $z = 900 - 2x^2 - 2y^2$, donde x e y medidas en metros son las coordenadas este-oeste y sur-norte respectivamente. Un hombre se encuentra en el punto $A(6;5;z_0)$.

a) ¿A qué altura se encuentra el hombre?

b) ¿En qué dirección desde el punto A debe caminar el hombre para escalar la montaña lo más rápido posible?. Si sigue esta dirección, ¿cuál es la rapidez de cambio del hombre? (considere la unidad de tiempo en segundo).

c) ¿Cuál es la dirección que apunta a la cima de la montaña desde el punto A? Si sigue esta dirección, ¿cuál es el valor de la pendiente de la montaña?

d) Si el hombre se mueve en la dirección sur-oeste, ¿está ascendiendo o descendiendo?, ¿cuál es su rapidez?

e) Describa el lugar geométrico de los puntos que el hombre debe recorrer, si su deseo es estar a la misma altura sobre el nivel del mar que en el punto A.

Solución ,

a) El hombre se encuentra a la altura de

$$z_0 = f(6;5) = 900 - 2(36) - 2(25) = 778 \text{ metros}$$

b) Como $\nabla f(x;y) = \big(f_x(x;y); f_y(x;y)\big) = (-4x;-4y)$, entonces el vector gradiente de f en $A'(6;5)$ (Proyección de A sobre el plano XY) es

$$\nabla f(6;5) = (-24;-20)$$

Luego, la dirección que debe caminar el hombre para escalar la montaña lo más rápido posible es

$$\nabla f(6;5) = (-24;-20)$$

En esta dirección, la rapidez de cambio de f es

$$D_{\vec{u}_\nabla} f(6;5) = \|\nabla f(6;5)\| = \sqrt{976} \cong 31{,}24$$

Por consiguiente, el hombre está subiendo con una rapidez de 31,24 m/seg

c) Como la superficie de la montaña tiene la forma de un paraboloide elíptico con vértice en el punto V(0;0;900), entonces la dirección que apunta a la cima de la montaña es dada por el vector que va del punto $A'(6;5)$ hacia el origen de coordenadas, esto es

$$\vec{a} = \overrightarrow{A'0} = (-6;-5)$$

y el vector unitario en esta dirección es

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left(-\frac{6}{\sqrt{61}}; -\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

Luego, el valor de la pendiente en esta dirección es

$$D_{\vec{u}_{\vec{a}}} f(6;5) = \nabla f(6;5) \bullet \vec{u}_{\vec{a}} = \frac{244}{\sqrt{61}} = 31{,}24$$

d) Para la dirección sur-oeste, se tiene $\theta = 225°$ (Fig. 3.8)

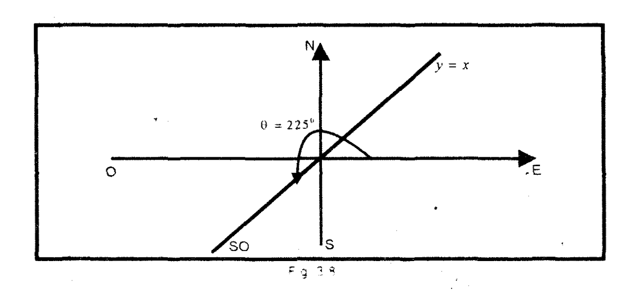


Fig 3.8

Luego, el vector unitario en la dirección sur-oeste es

$$\vec{u} = (\cos 225°\,; sen\ 225°) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Así, $D_{\vec{u}}f(6;5) = \nabla f(6;5) \bullet \vec{u} = 22\sqrt{2} \cong 31{,}11$

Por tanto, el hombre está subiendo con una rapidez de 31,11 m/seg.

e) El lugar geométrico de los puntos en la que el hombre debe recorrer alrededor de la montaña manteniendo la misma altura que en el punto $A(6;5;778)$, corresponde a la curva de nivel

$$f(x;y) = 900 - 2x^2 - 2y^2 = 778 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 = 122$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 61 \text{ (circunferencia).}$$

Ejemplo 24.- Calcule el valor de la derivada direccional de la función $z = f(x;y) = x^5 + xy + y^3$ en el punto $A(1;6)$, en la dirección de la curva $y = g(x) = 4x^2 + 2$

Solución

La derivada de la función g es $g'(x) = 8x$

Como la curva $y = g(x)$ pasa por el punto $A(1;6)$, entonces su dirección es dada por la recta tangente a la gráfica de g en A (Fig. 3.9).

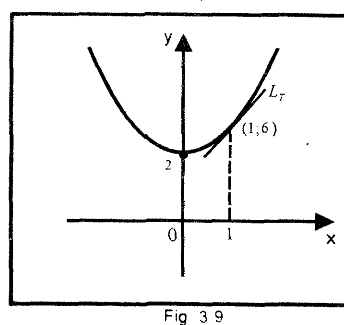
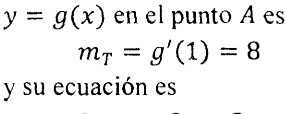
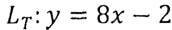


Fig 3.9

Así, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = g(x)$ en el punto A es


$$m_T = g'(1) = 8$$

y su ecuación es


$$L_T: y = 8x - 2$$

Luego, la ecuación vectorial de la recta tangente es

$$L_T: (x;y) = (1;6) + t(1;8), \quad t \in \mathbb{R}$$

El vector unitario en la dirección de la recta L_T, esto es, en la dirección del vector $\vec{a} = (1;8)$ es

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}; \frac{8}{\sqrt{65}}\right)$$

Como $\nabla f(x;y) = (5x^4 + y; x + 3y^2)$, entonces el vector gradiente en el punto A(1;6) es

$$\nabla f(1;6) = (11;109)$$

Por tanto, la derivada direccional de f en el punto $A(1;6)$, en la dirección de la curva $y = g(x)$ es

$$D_{\vec{u}_{\vec{a}}}f(1;6) = \nabla f(1;6) \bullet \vec{u}_{\vec{a}} = \frac{883}{\sqrt{65}}$$

Ejemplo 25.- Considere una función $f(x;y)$, tal que
$\nabla f(x;y) = (4x^3 + 2xy^4 + ye^{xy}; -3y^2 + 4x^2y^3 + xe^{xy})$ y $f(0;0) = 21$
La temperatura en un punto $(x;y)$ de una placa rectangular con centro en el origen está dada por

$$T(x;y) = f(x;y) + y^3 - e^{xy}$$

a) Determine la dirección en que una araña debe ir, partiendo del punto B(1;1) de la placa, para que se enfríe lo más rápidamente posible.
b) ¿Cuál es la rapidez de la araña en esta dirección?

Solución

Como $f_x(x;y) = 4x^3 + 2xy^4 + ye^{xy}$, entonces

$$f(x;y) = \int (4x^3 + 2xy^4 + ye^{xy})dx = x^4 + x^2y^4 + e^{xy} + C(y)$$

donde $C(y)$ es una función de la variable y.
Al igualar las derivadas parciales de f con respecto a y, se tiene

$$f_y(x;y) = 4x^2y^3 + xe^{xy} + C'(y) = -3y^2 + 4x^2y^3 + xe^{xy}$$

$$\Leftrightarrow C'(y) = -3y^2 \Leftrightarrow C(y) = -y^3 + k$$

Luego,

$$f(x;y) = x^4 + x^2y^4 + e^{xy} - y^3 + k$$

Dado que $f(0;0) = 21 \Leftrightarrow 1 + k = 21 \Rightarrow k = 20$
Así, la temperatura de la placa rectangular es

$$T(x;y) = f(x;y) + y^3 - e^{xy} = x^4 + x^2y^4 + 20$$

a) Como $\nabla T(x;y) = (4x^3 + 2xy^4; 4x^2y^3)$, entonces el vector gradiente de T en el punto $B(1;1)$ es

$$\nabla T(1;1) = (6;4)$$

Por tanto, la dirección que debe tomar la araña para enfriarse lo más rápido posible es

$$\vec{v} = -\nabla T(1;1) = (-6;-4)$$

b) La rapidez de la araña en la dirección del vector $\vec{v}$ es

$$|D_{\vec{u}_{\vec{v}}}T(1;1)| = |-\|\nabla T(1;1)\|| = |-\sqrt{52}| = \sqrt{52}$$

Ejemplo 26.- Sea $f(x;y;z) = x^2 + \cos(x+y) - z^3$. Halle la derivada direccional de f en el punto $P_0(1;-1;1)$ en la dirección de un vector ortogonal a la superficie de nivel de f que pasa por P_0

Solución

Como $\nabla f(x;y;z) = (2x - sen\,(x+y); -sen\,(x+y); -3z^2)$, entonces el vector ortogonal a la superficie de nivel de f en el punto P_0 es

$$\vec{a} = \nabla f(1;-1;1) = (2;0;-3)$$

y el vector unitario en esta dirección es

$$\vec{u}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; 0; -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

Por tanto, el valor de la derivada direccional de f en la dirección del vector ortogonal a su superficie de nivel en P_0 es

$$D_{\vec{u}_{\vec{a}}} f(1;-1;1) = \nabla f(1;-1;1) \bullet \vec{u}_{\vec{a}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Ejemplo 27.- Sea $f(x;y;z) = x^2y^2(2z+1)^2$. Halle la derivada direccional de f en el punto $A(1;1;-1)$, en la dirección de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies

$$S_1: x^2 + y^2 + 2(y - x) - 2 = 0$$

$$S_2: x - y - 2z - 2 = 0$$

de modo que al mirar la curva, desde el origen, el sentido es horario.

Solución

La ecuación cartesiana de la curva de intersección de las superficies es

$$\mathcal{C}: \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ \qquad y \\ x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

De donde las ecuaciones paramétricas del movimiento sobre la curva, en sentido horario está dado por

$$\mathcal{C}: \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = sen\ t \\ \dfrac{y+1}{2} = \cos t \\ z = \dfrac{x-y-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \mathcal{C}: \begin{cases} x = 2\,sen\ t + 1 \\ y = 2\cos t - 1 \\ z = sen\ t - \cos t \end{cases}$$

La función vectorial que describe el movimiento sobre la curva $\mathcal{C}$ es

$$\mathcal{C}: \alpha(t) = (2\,sen\ t + 1; 2\cos t - 1; sen\ t - \cos t) \ \text{ y } \ \alpha(0) = (1;1;-1)$$

Como $\alpha'(t) = (2\cos t; -2\,sen\ t; \cos t + sen\ t)$, entonces la dirección de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $\alpha(0) = (1;1;-1)$ es

$$\vec{a} = \alpha'(0) = (2;0;1)$$

y el vector unitario en esta dirección viene dado por

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; 0; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Por tanto, el valor de la derivada direccional de f en el punto A, en la dirección del vector $\vec{a}$ es

$$D_{\vec{u}_{\vec{a}}}f(1;1;-1) = \nabla f(1;1;-1) \bullet \vec{u}_{\vec{a}} = (2;2;-4) \bullet \left(\frac{2}{\sqrt{5}};0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

Ejemplo 28.- Una partícula rastreadora de calor está situada en el punto $A(5;4)$ de una placa metálica cuya temperatura en $(x;y)$ es $T(x;y) = 100 - x^2 - 3y^2$. Halle la trayectoria de la partícula al moverse de forma continua en la dirección de más rápido crecimiento de la temperatura.

Solución

Sea $\alpha(t) = \big(x(t);y(t)\big), t \in I$ la función vectorial que describe la trayectoria de la partícula en el plano XY.

Luego, el vector tangente en cada punto $\big(x(t);y(t)\big)$ de la trayectoria es dado por

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt};\frac{dy}{dt}\right)$$

Como la partícula busca el crecimiento más rápido de la temperatura, las direcciones de $\alpha'(t)$ y $\nabla T(x;y) = (-2x;-6y)$ son iguales en cada punto de la trayectoria, esto es

$$\alpha'(t) = \left(\frac{dx}{dt};\frac{dy}{dt}\right) = \nabla T(x;y) = (-2x;-6y)$$

de donde se obtiene las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x \\ \dfrac{dy}{dt} = -6y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = -2dt \\ \dfrac{dy}{y} = -6dt \end{cases}$$

Al integrar las dos últimas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{cases} \ln x = -2t + C_1 \\ \ln y = -6t + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-2t+C_1} = e^{C_1}.e^{-2t} \\ y = e^{-6t+C_2} = e^{C_2}.e^{-6t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = A_1e^{-2t} \\ y = A_2e^{-6t} \end{cases}$$

donde A_1 y A_2 son constantes reales. Así, la función vectorial que describe la trayectoria de la partícula es

$$\alpha(t) = (A_1e^{-2t};A_2e^{-6t}), t \in I = [0;+\infty\rangle$$

Puesto que la partícula parte desde el punto $A(5;4)$, se tiene

$$\alpha(0) = (A_1;A_2) = (5;4) \Leftrightarrow A_1 = 5 \text{ y } A_2 = 4$$

Por tanto, la trayectoria de la partícula es la curva

$$C: \alpha(t) = (5e^{-2t};4e^{-6t}) \Leftrightarrow C: y = \frac{4}{125}x^3$$

Ejemplo 29.- Dada la función $f(x;y) = (2by - x)^3$. Calcule el valor de b para que el valor de la derivada direccional máxima de f, en el punto $A(-1;0)$ sea igual a $3\sqrt{17}$.

Solución

Como $\nabla f(x;y) = (-3(2by-x)^2; 6b(2by-x)^2)$, entonces el vector gradiente de f en el punto $A(-1;0)$ es

$$\nabla f(-1;0) = (-3;6b)$$

La derivada direccional de f es máxima en la dirección del vector gradiente $\nabla f(-1;0) = (-3;6b)$ y su valor es el módulo de este vector, esto es,

$$D_{\vec{u}_{\nabla}} f(-1;0) = \|\nabla f(-1;0)\| = \sqrt{9+36b^2} = 3\sqrt{17} \Rightarrow b = \pm 2$$

Por tanto, los valores de b son $b=-2$ ó $b=2$

EJERCICIOS

1.- Halle el gradiente de las siguientes funciones en el punto indicado

a) $f(x;y;z) = z^2 e^x sen\, y$ $\quad P_0(0;\pi/2;2)$

b) $f(x;y;z) = \sqrt{x^2+y^2} - z$ $\quad P_0(2;-1;0)$

c) $f(x;y;z) = sen\,(3x) cos^2 x \tan z$ $\quad P_0(0;\pi/2;\pi/4)$

d) $f(x;y;z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad P_0(-1;1;3)$

e) $f(x;y;z) = x^z + z^x + y^z + z^y$ $\quad P_0(2;1;1)$ $\quad$ R. (1;1;3)

2.- Encuéntrese la razón de cambio máxima de las siguientes funciones en el punto que en cada caso se indica ($\|\nabla f\|$).

a) $f(x;y;z) = xy^2 + x^2 z$ $\quad A(3;1;2)$

b) $f(x;y;z) = e^x \cos y + e^y sen\, z$ $\quad A(-1;2;2)$

c) $f(x;y;z) = (x+y)^2 + z^2 - xy + 2z$ $\quad A(-2;3;2)$

d) $f(x;y;z) = x^z + z^x + y^z + z^y$ $\quad A(4;1;1)$

e) $f(x,y;z;t) = xz + y^2 t$ $\quad A(1;0;-3;$[illegible]$)$

3.- Calcule la derivada direccional de las siguientes funciones en el punto P en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$.

a) $f(x;y) = e^{2xy} + 3x\arctan(y)$, $P(0;0)$ y $Q(1;-1)$

b) $f(x;y) = e^x \cos y + e^y sen\, y$, $P(1;0)$ y $Q(-3;2)$

c) $f(x;y) = \sqrt{3x^2 - y^2 - 2xy + 1}$, $P(4;3)$ y $Q(7;7)$

d) $f(x;y;z) = x\, sen\,(yz)$, $P(1;1;0)$ y $Q(3;2;-2)$

e) $f(x;y;z) = \int_{xy}^{\cos(y\,sen\,z)} e^{\cos t} dt$, $P(0;1;0)$ y $Q(1;2;-1)$

4.- Para cada una de las siguientes funciones, calcule el valor máximo de la derivada direccional en los puntos que se indican, así como el vector dirección en el que este ocurre.

a) $f(x;y) = \dfrac{x^3 e^{x-1}}{x+y}$, $P(1;3)$

b) $f(x;y) = \cos(\pi xy) - y\,sen\,(\pi x^2)$, $P(1;-1)$

c) $f(x;y;z) = \dfrac{x + \ln(y)}{z}$, $P(1;1;1)$

d) $f(x;y;z) = \dfrac{z}{xy} - xyz + y^2 z$, $P(-1;1;0)$

e) $f(x;y;z) = \int_x^z e^{t^2} dt + z\int_{-y}^{x} \dfrac{1}{1+e^{t^2}} dt$, $P(1;-1;1)$

5.- Calcule la derivada direccional de la función $f(x;y) = 2y^3x - 3x^2$ en el punto $A(1;2)$ en la dirección del vector $\vec{a} = \left(\lambda; \sqrt{1-\lambda^2}\right)$ $(\lambda > 0)$.
Halle λ para que esta derivada sea máxima. R. $\lambda = 5/13$

6.- Una función f de dos variables tiene en el punto $P(2;3)$ los valores de las derivadas direccionales de 4 en la dirección al punto $A(3;3)$ y de -4 en la dirección al punto $B(2;4)$. Determine el vector gradiente de f en el punto $(2;3)$ y calcule el valor de la derivada de f en el punto $P(2;3)$ en la dirección al punto $Q(8;11)$.

$$R.\ \nabla f(2;3) = (4;-4)\ y\ D_{\vec{u}_{\vec{a}}} f(2;3) = -\frac{4}{5}$$

7.- Sea $f(x;y) = x^2y$. ¿Qué ángulo forma el vector dirección con la parte positiva del eje X, si la derivada direccional en el punto $P(1;-1)$ es 2?

$$R.\theta = \text{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)$$

8.- Calcule el valor de la derivada direccional de la función $z = \ln(x+y)$, en la dirección de la pendiente más pronunciada que caracteriza a la superficie $2z = \ln(e^x + e^y)$ cuando $z = 1$.

$$R.\ D_{\vec{u}}f(x;y) = \frac{e}{\sqrt{e^4 - 2e^e}}$$

9.- Si $f(x;y) = \sqrt{169 - x^2 - y^2}$, encuentre el vector dirección $\vec{u}$, tal que el valor de la derivada direccional de f en el punto $P(3;4)$ es cero.

$$R.\ \pm\frac{1}{5}(4;-3)$$

10.- ¿En qué dirección $f(x;y;z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2$ crece más rápidamente en el punto $P_0(2;-1;2)$? ¿Cuál es la razón instantánea de cambio de f por unidad de distancia en esa dirección?

$$R.\ \vec{a} = (-10;4;10)\ y\ \|\nabla f(2;-1;1)\| = \sqrt{216}$$

11.- La altura de una colina sobre el nivel del mar está dada por

$$h = f(x;y) = 200e^{-(x+1)^2} + 80ye^{-2y^2}$$

donde x e y medidas en metros, son las coordenadas este-oeste y sur-norte respectivamente. Un atleta se encuentra en el punto $A(1;0;h_0)$

a) ¿A qué altura se encuentra el atleta?

b) ¿En qué dirección desde el punto A debe comenzar a caminar el atleta para escalar la colina lo más rápido posible? Si sigue esta dirección, ¿cuál es su rapidez de cambio del atleta?

c) Si el atleta se mueve en la dirección sur-este, ¿está ascendiendo o descendiendo? ¿Cuál es su rapidez?

d) Describa el lugar geométrico de los puntos que el atleta debe caminar , para estar a la misma altura sobre el nivel del mar que en el punto A.

12.- La superficie de un lago se representa por una región D en el plano XY de modo que la profundidad debajo del punto $(x;y) \in D$ es dada por

$$f(x;y) = -10 - 2x^2 - 2y^2$$

Si una pariguana se encuentra en el agua en el punto (4;3):

a) ¿En que dirección debe nadar para que la profundidad debajo de ella disminuya lo más rápido posible? ¿Cuál es el valor máximo de la derivada direccional en esa dirección?

$$R.\ \vec{a} = (-16;-12)\ y\ \|\nabla f(3;4)\| = 20$$

b) ¿En qué dirección debe nadar para que la profundidad debajo de ella aumente lo más rápido posible? ¿Cuál es el menor valor de la derivada direccional en esa dirección?

c) ¿En qué dirección no cambia la profundidad? $\vec{u} = \pm\frac{1}{5}(-3;4)$

13.- Una nave espacial ha sobrepasado el planeta Marte cuando su capitán nota que la cápsula está comenzado a derretirse. La temperatura a su alrededor está dada por $T = (x; y; z) = 2e^{-(x-2)} + 3e^{-2(y-2)} + 4e^{3(z-2)}$
Si la nave se encuentra en el punto $A(2; 2; 2)$, ¿qué rumbo debe tomar para enfriarse lo más rápidamente posible?

14.- Hay alguna dirección en la que la razón de cambio de
$f(x; y) = 8x^2 - 2x^2y - 7y^2$
en el punto $A(1; 1)$ sea igual a 21? (Justifique su respuesta?

15.- Halle la derivada direccional de la función $f(x; y) = 4x^3 - 2xy + y^4$ en el punto $A(1; -1)$, en la dirección del vector que forma con la parte positiva del eje X un ángulo de 30°

16.- Considere que $T(x) = 7 + 3x^2 + y^2$ representa la distribución de la temperatura en el plano XY (suponga que x e y se miden en metros y la temperatura en °C). Un hombre se encuentra en la posición $A(1; 4)$ y pretende dar un paseo.

a) Describa el lugar geométrico de los puntos que él debe recorrer si su deseo es disfrutar siempre la misma temperatura que en el punto A.
R. $3x^2 + y^2 = 16$

b) ¿Cuál es la dirección que debe tomar si su deseo es caminar en el sentido de mayor ascenso de la temperatura?, ¿cuál es la temperatura en esta dirección?
R. Dirección $\vec{a} = (6; 8)$ y $\|\nabla T(1; 4)\| = 10$

c) Si su deseo es caminar en la dirección del descenso más rápido de la temperatura, ¿qué dirección debe tomar? R. Dirección $\vec{b} = (-6; -8)$

d) Observe que el punto $(0; 0)$ es el punto más frío del plano XY. Encuentre la trayectoria que el hombre (que busca el frío) debe seguir hacia el origen, partiendo del punto A(1;4) R. $y = 4\sqrt[3]{x}$

e) ¿En qué dirección debe moverse desde A(1;4) si su deseo es que la temperatura aumente a razón de 4°C/m?

17.- La altura del volcán Sara Sara, en metros sobre el nivel del mar, está dada por
$$h = 5400 - x^2 - \frac{y^2}{2}$$
Si un alpinista comienza su ascenso en el punto A(40;20), ¿cuál es la trayectoria en el plano XY que corresponde a la ruta más empinada de ascenso al volcán? R. $y = \sqrt{10x}$

18.- La temperatura en un punto $(x; y; z)$ de un sólido está dada por

$$T(x; y; z) = \cos(xy) + e^{x^2+y^2+z^2} - \ln(yz)$$

a) Calcule la razón de cambio de la temperatura en el punto $P(0; 1; 1)$ y en la dirección del vector $\vec{a} = (-1; 2; 2)$.

b) ¿En qué dirección T crece más rápidamente? ¿A qué ritmo?

19.-Dada la función $g(x; y) = e^{x+y} + \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{t^4+1}} dt$

a) Calcule la derivada direccional de g en el punto $(0; 0)$ en la dirección del vector $\vec{a} = (2; 1)$

b) ¿En qué dirección la derivada direccional de g en $(0; 0)$ toma el valor máximo?

20.- ¿Cuál es la razón de cambio de la función $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z - 4$ a lo largo de la curva $\alpha(\theta) = \left(\frac{3\cos\theta}{2}; \frac{1}{2} + \frac{3}{2} sen\ \theta; \frac{3}{2} - \frac{3}{2} sen\ \theta\right)$ en el punto que corresponde a $\theta = \frac{\pi}{6}$?

21.- Calcule las constantes a, b y c para que la derivada direccional de la función $f(x; y; z) = axz^2 + bxy + cx^2y^2$ en el punto $P(1; 1; -1)$ tenga un valor máximo de 4, y esté en el sentido positivo del eje Z.

R. $a = \pm 2,\ b = \mp 2,\ c = \pm 1$

22.- Sea $z = f(ax + by)$, donde a y b son constantes positivas y f es una función derivable.

a) Demuestre que en cualquier punto $A(x_0; y_0)$, el vector gradiente de z es paralelo al vector $\vec{u} = (a; b)$

b) Determine los punto $Q(x_1; y_1)$ tales que la derivada direccional de z en Q y en la dirección del vector $\vec{v} = (-b; a)$ es igual a cero.

23.- Dada la función $f(x; y) = \int_1^x e^{\frac{(t-1)^2}{2}} dt - (2y - x)^2$

a) Halle la derivada direccional de f en el punto $A(1; -1)$ según la dirección nor-este. En esta dirección, ¿aumenta o disminuye el valor de f?

b) Determine la dirección del descenso más rápido de f en el punto A. ¿Cuál es el valor de la derivada direccional de f en esta dirección?

24.- Un grupo de alpinistas escalan una montaña que se encuentra sobre la Cordillera Blanca ubicada en el departamento de Ancash. Suponga que la altura de la montaña sobre el nivel del mar viene dada por la ecuación $z = 6 - 2x^2 - 3xy + y^3$ (las distancias se miden en kilómetros). Los alpinistas se encuentran en el punto $A(1;2;6)$ a las 12 de la noche en plena oscuridad.

a) Los alpinistas no se ponen de acuerdo qué dirección deben seguir para escalar lo más rápido posible a la cima de la montaña, por lo que deciden calcular la pendiente de la montaña en el punto A en la dirección norte y en la dirección nor-oeste. Si deben seguir por la ruta de mayor pendiente, ¿cuál de las dos direcciones deben elegir? R. Deben elegir la dirección nor-oeste.

b) ¿Cuál es la dirección de máxima pendiente en A? ¿Cuál es el valor de dicha pendiente? R. Dirección $\vec{a} = (-10;9)$ y $\|\nabla f(1;2)\| = \sqrt{181}$

25.- Sea $f(x;y;z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. Halle la derivada direccional de f en el punto $(1;3;2)$ a lo largo de la curva de intersección de las superficies $S_1: 36x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 108$ y $S_2: x^2 + y^2 - 5z = 0$, si al mirar éste desde el origen, el sentido es horario.

$$R.\ D_{\vec{u}}f(1;3;2) = \frac{36}{7\sqrt{194}}$$

26.- Sea C la curva de intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + z^2 = 1$, en el primer octante. Halle la derivada direccional de la función $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2$ a lo largo de esta curva en el punto

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\qquad R.\ D_{\vec{u}}f = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

3.4 PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

Teorema 5.- Sea $S: F(x;y;z) = 0$ la ecuación de una superficie, donde $F(x;y;z)$ es una función con primeras derivadas parciales continuas. Si F_x, F_y y F_z no son todos ceros en el punto $P_0(x_0;y_0;z_0) \in S$, entonces el vector $\vec{N} = \nabla F(x_0;y_0;z_0)$ es normal al plano tangente a la superficie S en P_0.

Definición 8.- Sea $S: F(x; y; z) = 0$ la ecuación de una superficie, donde $F(x; y; z)$ es una función con primeras derivadas parciales continuas en $P_0(x_0; y_0; z_0)$, con $\nabla F(x_0; y_0; z_0) \neq \vec{0}$.

i) El plano que pasa por P_0 y es normal a $\nabla F(P_0)$ se denomina plano tangente a S en P_0 y tiene por ecuación general

$$P_T: F_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0$$

ii) La recta que pasa por P_0 y tiene la dirección de $\nabla F(x_0; y_0; z_0)$ se denomina recta normal a S en P_0 y tiene por ecuación vectorial

$$L_N = \{(x_0; y_0; z_0) + t\nabla F(P_0) \ / \ t \in \mathbb{R}\}$$

La ecuación simétrica de la recta normal a S en P_0 está dada por

$$L_N: \frac{x - x_0}{F_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0; y_0; z_0)}$$

Ejemplo 30.- Halle las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie $4x^2 + y^2 - 16z = 0$ en el punto $(2; 4; 2)$.

Solución

Al considerar $F(x; y; z) = 4x^2 + y^2 - 16z = 0$, se tiene

$$\nabla F(x; y; z) = (8x; 2y; -16)$$

Así, el vector gradiente en el punto $P_0(2; 4; 2)$ es

$$\nabla F(2; 4; 2) = (16; 8; -16)$$

Luego, la ecuación del plano tangente en $P_0(2; 4; 2)$ es

$$P_T: 16(x - 2) + 8(y - 4) - 16(z - 2) = 0 \Leftrightarrow P_T: 2x + y - 2z - 4 = 0$$

La ecuación simétrica de la recta normal es

$$L_N: \frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}$$

Observación 7.- Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección de las superficies

$$F(x; y; z) = 0 \text{ y } G(x; y; z) = 0$$

La recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$, es la recta intersección de los planos tangentes a las superficies $F(x; y; z) = 0$ y $G(x; y; z) = 0$

en el punto P_0. Luego, los vectores normales $\vec{N}_1 = \nabla F(x_0; y_0; z_0)$ y $\vec{N}_2 = \nabla G(x_0; y_0; z_0)$ son ortogonales al vector tangente a la curva $\mathcal{C}$ en P_0.
Por tanto, el vector tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto P_0 tiene la misma dirección que el vector $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

Observación 8.- Si la ecuación de una superficie está definida de manera explícita por $z = f(x; y)$, se define la función F por $F(x; y; z) = f(x; y) - z = 0$ y la ecuación del plano tangente en el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ viene dada por

$$P_T: f_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f_y(x_0; y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Ejemplo 31.- Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies $\mathcal{C}: x^2 + y^2 - z = 8$ y $x - y^2 + z^2 = -2$ en el punto $P_0(2; -2; 0)$.
Solución
Sean las superficies:
$F(x; y; z) = x^2 + y^2 - z - 8$ y $G(x; y; z) = x - y^2 + z^2 + 2$
Luego, los vectores gradientes de estas funciones son

$$\nabla F(x; y; z) = (2x; 2y; -1) \text{ y } \nabla G(x; y; z) = (1; -2y; 2z)$$

En el punto $P_0(2; -2; 0)$, los vectores normales de los planos tangentes son

$$\vec{N}_1 = \nabla F(2; -2; 0) = (4; -4; 1) \text{ y } \vec{N}_2 = \nabla G(2; -2; 0) = (1; 4; 0)$$

De donde se obtiene $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = (4; -1; 20)$
Por tanto, la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto P_0 es

$$L_T: (x; y; z) = (2; -2; 0) + t(4; -1; 20), t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 32.- Halle el valor de m para el cual el plano $Q: x - 2y - 2z + m = 0$ es tangente a la superficie $S: x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 144$
Solución
Al expresar la ecuación de la superficie S en su forma explícita, se tiene

$$F(x; y; z) = x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 144$$

Si $P_0(x_0; y_0; z_0)$ es el punto de tangencia del plano tangente, entonces su normal es

$$\vec{N} = \nabla F(x_0; y_0; z_0) = (2x_0; 8y_0; 32z_0)$$

Como el vector normal del plano dado $\vec{N}_Q = (1; -2; -2)$ y $\vec{N}$ son paralelos, se sigue que

$$\vec{N} \times \vec{N}_Q = (-16y_0 + 64z_0; 4x_0 + 32z_0; -4x_0 - 8y_0) = (0; 0; 0)$$

De donde resulta $x_0 = -8z_0$ y $y_0 = 4z_0$

Puesto que $P_0(-8z_0; 4z_0; z_0)$ es un punto de la superficie S, entonces sus coordenadas satisfacen su ecuación, esto es

$$64z_0^2 + 64z_0^2 + 16z_0^2 = 144 \Leftrightarrow z_0 = \pm 1$$

Luego, los puntos de tangencia son

$$P_0(-8; 4; 1) \text{ y } P'_0(8; -4; -1)$$

Por tanto, al ser $P_0(-8; 4; 1)$ y $P'_0(8; -4; -1)$ puntos del plano $Q: x - 2y - 2z + m = 0$, se obtienen $m = 18$ para el punto P_0 y $m = -18$ para el punto P'_0.

Ejemplo 33.- Halle los puntos de la superficie $S: \dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{4} = 11$, en los cuales el plano tangente a S es paralelo al plano $Q: x + 2y + 3z = 3$. Para cada uno de los puntos obtenidos, escriba la ecuación general del plano tangente.

Solución

Consideremos la ecuación de la superficie como

$$F(x; y; z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{4} - 11$$

Como $\nabla F(x; y; z) = \left(\dfrac{x}{2}; 2y; \dfrac{z}{2}\right)$, entonces el vector normal del plano tangente a la superficie S en el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$ es

$$\vec{N} = \nabla F(x_0; y_0; z_0) = \left(\frac{x_0}{2}; 2y_0; \frac{z_0}{2}\right)$$

Dado que el plano tangente P_T y el plano Q son paralelos, se sigue que sus vectores normales $\vec{N}$ y $\vec{N}_Q = (1; 2; 3)$ son paralelos, lo cual significa que

$$\vec{N} \times \vec{N}_Q = \left(6y_0 - z_0; -\frac{3}{2}x_0 + \frac{z_0}{2}; x_0 - 2y_0\right) = (0; 0; 0)$$

De donde resulta: $x_0 = 2y_0$ y $z_0 = 6y_0$

Puesto que $P(2y_0; y_0; 6y_0)$ es un punto de la superficie de S, sus coordenadas satisfacen su ecuación, es decir

$$S: y_0^2 + y_0^2 + 9y_0^2 = 11 \Leftrightarrow y_0 = \pm 1$$

Luego, los puntos de tangencia son: $P_1(2; 1; 6)$ y $P_2(-2; -1; -6)$

Por tanto, las ecuaciones generales de los planos tangentes en los puntos P_1 y P_2 son respectivamente

$$Q_1: x + 2y + 3z - 22 = 0 \text{ y } Q_2: x + 2y + 3z + 22 = 0$$

Ejemplo 34.- Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ con el plano $x = 1$.

a) Halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $P_1(1; 2; 4)$.

b) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $S: 4x^2 + 3y^2 - 24z = 0$, que es perpendicular a la recta tangente obtenida en a).

Solución

La función vectorial que indica la posición de un punto sobre la curva $\mathcal{C}$ es $C: \alpha(t) = (1; t; 8 - t^2)$

Para $t = 2$, se obtiene $\alpha(2) = (1; 2; 4)$

Como $\alpha'(t) = (0; 1; -2t)$, entonces $\alpha'(2) = (0; 1; -4)$

a) La ecuación vectorial de la recta tangente a la curva $\mathcal{C}$ en el punto $P_1(1; 2; 4)$, que sigue la dirección del vector $\alpha'(2)$ es

$$L_T: (x; y; z) = (1; 2; 4) + t(0; 1; -4), t \in \mathbb{R}$$

b) Sean $F(x; y; z) = 4x^2 + 3y^2 - 24z$ y $P(x_0; y_0; z_0)$ el punto de tangencia del plano tangente a la superficie S. Luego, se tiene

$$\vec{N} = \nabla F(P_0) = (8x_0; 6y_0; -24)$$

Como el plano tangente es perpendicular a la recta tangente obtenida en a), entonces el vector normal $\vec{N}$ y el vector dirección de la recta tangente $\vec{a} = (0; 1; -4)$ son paralelos, lo cual implica que

$$\vec{N} \times \vec{a} = (-24y_0 + 24; 32x_0; 8x_0) = (0; 0; 0)$$

De donde resulta, $y_0 = 1, x_0 = 0$

Así, en virtud de que $P(0; 1; z_0)$ es un punto de la superficie S, se tiene

$$0 + 3 - 24z_0 = 0 \Longrightarrow z_0 = \frac{1}{8}$$

Por consiguiente, la ecuación del plano tangente que pasa por $P\left(0; 1; \frac{1}{8}\right)$ es

$$P_T: 2y - 8z - 1 = 0$$

Ejemplo 35.- Demuestre que la suma de los cuadrados de las intersecciones con los ejes coordenados de cualquier plano tangente a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = b^{2/3}$ es constante e igual a b^2.

Solución

Sean $F(x;y;z) = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} - b^{2/3}$ y $P_0(x_0;y_0;z_0)$ el punto de tangencia de la superficie. Entonces

$$\vec{N} = \nabla F(P_0) = \left(\frac{2}{3}x_0^{-1/3}; \frac{2}{3}y_0^{-1/3}; \frac{2}{3}z_0^{-1/3}\right)$$

Luego, la ecuación del plano tangente a la superficie en P_0 es

$$P_T: x_0^{-1/3}(x - x_0) + y_0^{-1/3}(y - y_0) + z_0^{-1/3}(z - z_0) = 0$$

el cual es equivalente a

$$P_T: \frac{x}{x_0^{1/3}} + \frac{y}{y_0^{1/3}} + \frac{z}{z_0^{1/3}} = b^{2/3} \quad (x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3} = b^{2/3})$$

Las intersecciones del plano tangente con los ejes X,Y y Z son respectivamente

$$x = x_0^{1/3}b^{2/3}, y = y_0^{1/3}b^{2/3} \text{ y } z = z_0^{1/3}b^{2/3}$$

Por consiguiente, la suma de los cuadrados de estas coordenadas es

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(x_0^{2/3} + y_0^{2/3} + z_0^{2/3}\right)b^{4/3} = b^{2/3}b^{4/3} = b^2$$

EJERCICIOS

1.- Determine la ecuación general del plano tangente y de la recta normal, para cada una de las superficies, cuyas ecuaciones se dan a continuación, en el punto P dado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 17$, $P(2;-2;2)$ $\qquad R.$ $2x - 2y + 3z = 17$

b) $z = \dfrac{x}{x+y}$, $P(2;-1;2)$

c) $x^5 + y^5 + z^5 = 30 - xyz$, $P(2;1;-1)$

d) $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = 4$, $P(4;1;1)$

e) $2x^2 - xy^2 - yz^2 = 18$, $P(0;-2;3)$

f) $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = 14$, $P(-8;27;1)$

2.- En los siguientes casos, halle la ecuación vectorial de la recta tangente a la curva de intersección entre las superficies dadas en el punto indicado.

a) $y = x^2, y = 16 - z^2$, $P(4;16;0)$

b) $x^2 + z^2 + 4y = 0, x^2 + y^2 + z^2 + 7 = 0$, $P(0;-1;2)$

c) $x = 2 + \cos(\pi yz), y = 1 + sen\,(\pi xz)$, $P(3;1;2)$

d) $xyz = 36$, $4x^2 + y^2 - 2xz^2 = 105$, $P(6;3;2)$

3.- Dada la función $f(x;y;z) = arcsen\left(\frac{x^2}{6} + \frac{3y^2}{2} + \frac{z^2}{24} - \frac{1}{2}\right)$

a) Halle la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel

$f(x;y;z) = \frac{\pi}{6}$, en el punto $\left(1;\frac{1}{3};-4\right)$ $R. x + 3y - z = 6$

b) ¿En qué proporción varian los valores funcionales cuando comienza a moverse desde el punto $(1;1/3;-4)$ hacia el punto $(2;-5/2;-2)$?

Sugerencia: Aplique el concepto de la derivada direccional.

4.- ¿En qué puntos del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ la normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

5.- Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, trace a ella planos tangentes que sean paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$

6.- Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $4y^2 - 2x^2 - 7z = 0$ que pase por el punto $(-8;0;4)$ y sea perpendicular al plano $\frac{x}{4} - \frac{z}{7} = 1$

R. $4x \pm 4\sqrt{6}y + 7z + 4 = 0$

7.- ¿En qué puntos de la gráfica de la superficie $S: 4x^2 + y^2 + z^2 - 2xy = 12$, los planos tangentes a la superficie son paralelos al plano YZ?

R. $(2;2;0)$ y $(-2;-2;0)$

8.- Halle las ecuaciones del plano tangente y recta normal, si se sabe que el plano tangente es horizontal a la gráfica de la superficie $z = x^2 + 4y^2 + 1$

R. Plano tangente: $z = 1$

9.- Verifique que la suma de las intersecciones con los ejes coordenados de todo plano tangente a la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, $a > 0$ es constante e igual al valor de a.

10.- Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $x^2 - y^2 - 3z = 0$ que pase por el punto $(0;0;-1)$ y sea paralelo a la recta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

R. $4x - 2y - 3z = 3$

11.- Halle en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ los puntos en que los planos tangentes a ella sean paralelos a los planos coordenados. R. En los puntos $(1; \pm 1; 0)$ los planos tangentes son paralelos al plano XZ, y en los puntos $(6; 0; 0)$ y $(2; 0; 0)$ al plano YZ. La superficie carece de puntos en los cuales el plano tangente sea paralelo al plano XY.

12.- Halle la mayor razón de cambio de la función

$$f(x; y; z) = e^{x^2} \cos((x + 2y)\pi) + 16y^2 + z^2$$

en el punto P_0, donde P_0 es un punto de la superficie

$$S: z^2 = x^2 - 2y^2 + 3y - 6$$

en el que el plano tangente es paralelo al plano $2x - y - 2z = 6$

13.- Halle la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{2} + y^2 + 7z^2 = 126$ que es ortogonal a la recta tangente en $(2; 1; 6)$ a la curva de intersección de las superficies $z = x^2 + 2y^2$, $z = 2x^2 - 3y^2 + 1$

$$R.\ 5x + 2y + 28z \pm 166\sqrt{\frac{63}{83}} = 0$$

14.- Halle el valor de k para que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x - k)^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$, los planos tangentes sean perpendiculares uno al otro. R. $k = \pm 2$

15.- **Def.** Dos superficies son tangentes en el punto P si tienen el mismo plano tangente en P. Demuestre que las superficies dadas son tangentes en P.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $yz = 1$, $P(0; 1; 1)$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $xyz = 1$, $P(1; 1; 1)$

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2 + c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$, $P(0; \pm b; c)$

16.- **Def.** Dos superficies son ortogonales en el punto P si sus normales en P son perpendiculares. Demuestre que las superficies dadas son perpendiculares entre si en el punto dado.

a) $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$, $(1; 1; 2)$

b) $x^2 - y^2 + z^2 = -2$, $x^2 + y^2 + 3z^2 = 8$, $(-1; 2; 1)$

3.5 INCREMENTO Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Para una función f de varias variables no es suficiente la existencia de las derivadas parciales en un punto para decir que la función es diferenciable en ese punto, puesto que la existencia de la derivada en la dirección de los ejes coordenados no implica la existencia de la derivada en otras direcciones.

Es más, aunque la derivada de la función existiera en un punto en todas las direcciones, no se puede garantizar la existencia del plano tangente a la gráfica de f en ese punto.

Por ejemplo, una función f de dos variables, geométricamente es diferenciable en un punto $(x_0; y_0) \in D_f$ si existe plano tangente a la gráfica de f en el punto $Q(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$; y esto ocurre cuando la gráfica de f es suave en ese punto, es decir, su gráfica no tiene vértices, puntos críticos, etc. en ese punto.

La diferencial de una función de varias variables es el concepto teórico que garantiza la existencia del plano tangente a la gráfica de la función en un punto.

Vamos a empezar a definir el concepto de incremento de una función de varias variables. Luego, se presenta el concepto de diferencial de una función de varias variables.

Definición 9.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, tal que $z = f(x; y)$, y sean Δx y Δy los incrementos de x y de y respectivamente. El incremento de $z = f(x; y)$ en cualquier punto $(x; y) \in D$ es dado por

$$\Delta f(x; y) = \Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

En general se tiene la siguiente definición:

Definición 10.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables, tal que $z = f(x_1; \dots; x_n)$ y sea $\Delta P = (\Delta x_1; \dots; \Delta x_n)$ el incremento del punto $P(x_1; \dots; x_n) \in D$. El incremento total de la función f o simplemente incremento de f en P es dado por

$$\Delta f(P) = \Delta z = f(x_1 + \Delta x_1; \dots; x_n + \Delta x_n) - f(x_1; \dots; x_n) \text{ ó}$$

$$\Delta f(P) = f(P + \Delta P) - f(P)$$

Ejemplo 36.- Sea $f(x;y) = 3x^2 + 2xy - y^2$, $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = -0{,}02$
Halle el incremento de f en el punto $P(1;4)$.

Solución

El incremento de la función $z = f(x;y)$ en el punto $P(1;4)$ es

$$\Delta f(1;4) = f(1 + 0{,}03; 4 - 0{,}02) - f(1;4) = f(1{,}03; 3{,}98)$$
$$= [3(1{,}03)^2 + 2(1{,}03)(3{,}98) - (3{,}98)^2] - [3 + 8 - 16] = 0{,}5411$$

Definición 11.- (Diferenciabilidad de una función) Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, tal que $z = f(x;y)$, y sea $\Delta P = (\Delta x; \Delta y)$ el incremento del punto $P(x;y) \in D$.

Se dice que la función f es diferenciable en $P(x;y)$, si existe el vector gradiente $\nabla f(P)$ tal que para $P + \Delta P \in D$ el incremento Δz se puede expresar en la forma

$$\Delta f(x;y) = \Delta z = D_1 f(x;y)\Delta x + D_2 f(x;y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad \text{ó}$$

$$f(P + \Delta P) = f(P) + \nabla f(P) \bullet \Delta P + \varepsilon(\Delta P),$$

donde $\lim\limits_{\Delta P \to \vec{0}} \varepsilon(\Delta P) = \lim\limits_{(\Delta x;\Delta y) \to (0;0)} \varepsilon(\Delta x; \Delta y) = 0$

Ejemplo 37.- Sea $f(x;y) = 4x - 2xy^2$. Demuestre que f es diferenciable en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$.

Solución

Para $P(x;y) \in \mathbb{R}^2$ y $\Delta P = (\Delta x; \Delta y)$, se tiene

$$f(P + \Delta P) = f(x + \Delta x; y + \Delta y) = 4(x + \Delta x) - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y)^2$$
$$= 4x - 2xy^2 + (4 - 2y^2)\Delta x - 4xy\Delta y - (4y\Delta y)\Delta x - [2x\Delta y + 2\Delta x\Delta y]\Delta y$$
$$= f(x;y) + \nabla f(P) \bullet \nabla P + \varepsilon(\Delta x; \Delta y),$$

donde

$$\lim_{(\Delta x;\Delta y) \to (0;0)} \varepsilon(\Delta x; \Delta y) = \lim_{(\Delta x;\Delta y) \to (0;0)} [-(4y\Delta y)\Delta x - (2x\Delta y + 2\Delta x\Delta y)\Delta y] = 0$$

Por consiguiente, f es diferenciable en cualquier punto $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. En general, se tiene la siguiente definición:

Definición 12.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables tal que $z = f(x_1; \dots; x_n)$ y sea $\Delta P = (\Delta x_1; \dots; \Delta x_n)$ el incremento del punto $P(x_1; \dots; x_n) \in D$.

Se dice que f es diferenciable en $P(x_1; \dots; x_n)$ si existe el vector gradiente $\nabla f(P)$, tal que para $P + \Delta P \in D$ el valor de la función se puede expresar en la forma

$$f(P + \Delta P) = f(P) + \nabla f(P) \bullet \nabla P + \varepsilon(\Delta P)$$

donde $\lim\limits_{\Delta P \to \vec{0}} \varepsilon(\Delta P) = \lim\limits_{(\Delta x_1;\ldots;\Delta x_n)\to(0;\ldots;0)} \varepsilon(\Delta x_1; \ldots ; \Delta x_n) = 0$

Teorema 6.- Si una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de dos variables es diferenciable en el punto $P_0(x_0; y_0)$, entonces f es continua en P_0.

El recíproco del Teorema 6 no es necesariamente verdadero, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 38.- Demuestre que la función $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ es continua en $(0; 0)$ pero no es diferenciable en $(0; 0)$.

Solución

i) $f(0; 0) = 0$ ii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x; y) = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

iii) $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x; y) = f(0; 0) = 0$

Por tanto, f es continua en $(0; 0)$. Por otro lado,

$$\nabla f(x; y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

no existe en $(0; 0)$. Luego, f no es diferenciable en $(0; 0)$.

Teorema 7.- Si la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y las funciones

$f_x(x; y) = \dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x}$ y $f_y(x; y) = \dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y}$ son continuas en D, entonces f es diferenciable en D.

Ejemplo 39.- Sea $f(x; y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & si\ (x; y) \neq (0; 0) \\ 0, & si\ (x; y) = (0; 0) \end{cases}$

Demuestre que $f_x(0; 0)$ y $f_y(0; 0)$ existen, pero que f no es diferenciable en (0;0).

Solución: Se tiene

$$f_x(0; 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h; 0) - f(0; 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0;0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0;k) - f(0;0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Luego, las derivadas parciales de f en $(0;0)$ existen.

Ahora, sean $T_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x\}$ y $T_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = 0\}$ dos trayectorias que pasan por el punto $(0;0)$. Los límites de f sobre estas trayectorias son

Sobre T_1: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x;x) = \frac{1}{4}$

Sobre T_2: $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x;0) = 0$

Así, por la regla de las dos trayectorias $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x;y)$ no existe, lo que significa que f no es continua en $(0;0)$.

Por consiguiente, en virtud del teorema 7, f no es diferenciable en $(0;0)$.

Definición 13:- (Diferencial Total). Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables para la cual existen $f_x(x;y)$ y $f_y(x;y)$ en todo $(x;y) \in D$, y sean Δx y Δy incrementos de x e y respectivamente.

i) Las diferenciales de las variables independientes x e y son

$$dx = \Delta x \;, \qquad dy = \Delta y$$

ii) La diferencial total de f, denotada por $df(x;y)$ es

$$df(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} dy$$

La extensión de esta definición a funciones de n variables es el siguiente:

Definición 14.- Sea $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables para la cual existen $D_i f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ para $i = 1,2,\ldots,n$ y sean $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ incrementos de las variables $x_1, \ldots, x_n$ respectivamente.

i) Las diferenciales de las variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ son

$$dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \ldots, dx_n = \Delta x_n$$

ii) La diferencial total de f, denotada por $df(x_1, \ldots, x_n)$ es

$$df(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n} dx_n$$

Ejemplo 40.- Halle la diferencial total de la función

$$z = f(x;y) = \frac{y}{x^3} + \arctan\left(\frac{y}{x^3}\right)$$

Solución

Las derivadas parciales de f son

$$f_x(x;y) = -\frac{3y}{x^4} - \frac{3yx^2}{x^6+y^2}, \qquad f_y(x;y) = \frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{x^6+y^2}$$

Luego, la diferencial total de f es

$$dz = df(x;y) = \left(-\frac{3y}{x^4} - \frac{3yx^2}{x^6+y^2}\right)dx + \left(\frac{1}{x^3} + \frac{x^3}{x^6+y^2}\right)dy$$

Observación 9.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el punto $P(x_1; \dots; x_n) \in D$, es decir

$$\Delta f(P) = D_1 f(P)\Delta x_1 + \cdots + D_n f(P)\Delta x_n + \varepsilon(\Delta P)$$

donde $\lim\limits_{\Delta P \to 0} \varepsilon(\Delta P) = 0$

Así, cuando $\Delta P = (\Delta x_1; \dots; \Delta x_n) \to (0; \dots; 0)$, el cambio real de $z = f(x_1; \dots; x_n)$ es aproximadamente igual a la diferencial total dz, es decir,

$$\Delta z = \Delta f(P) \cong dz = df(P)$$

De donde resulta

$$f(P + \Delta P) \cong f(P) + df(P)$$

Ejemplo 41.- Use diferenciales para calcular el valor aproximado de $\sqrt[3]{6(1{,}98)^3 + (4{,}1)^2}$

Solución

Al considerar la función $f(x;y) = \sqrt[3]{6x^3 + y^2}$, se puede calcular con facilidad

$$f(2;4) = \sqrt[3]{48+16} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Luego, al tomar $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $dx = \Delta x = -0{,}02$ y $dy = \Delta y = 0{,}1$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(1{,}98; 4{,}1) &= \sqrt{6(1{,}98)^2 + (4{,}1)^2} \\ &\cong f(2;4) + df(2;4) \\ &\cong 4 + f_x(2;4)dx + f_y(2;4)dy \end{aligned}$$

Como $f_x(x;y) = \dfrac{6x^3}{(6x^3+y^2)^{2/3}}$ y $f_y(x;y) = \dfrac{2y}{3(6x^3+y^2)^{2/3}}$, entonces se tiene

$$f_x(2;4) = \frac{48}{16} = 3 \text{ y } f_y(2;4) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

Por tanto,

$$\sqrt{6(1{,}98)^2 + (4{,}1)^2} \cong 4 + 3(-0{,}02) + \frac{1}{6}(0{,}1) = 3{,}9567$$

PROPAGACIÓN DE ERRORES

Si x e y denotan los valores medidos de dos variables y $x + \Delta x$ y $y + \Delta y$ representan los valores exactos, entonces Δx y Δy son los errores de medición. Si los valores medidos de x e y se usan para calcular el valor de la variable dependiente $z = f(x; y)$, entonces el error propagado en la medida de la variable z es

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$$

Observación 10.-

a) El error propagado en la variable $z = f(x; y)$ se estima o se aproxima por la diferencial total de z, esto es

$$\Delta z \cong dz = f_x(x; y)dx + f_y(x; y)dy$$

b) Para determinar si el error propagado en la variable dependiente z es grande o pequeño, se usa el error relativo y el error porcentual de $z = f(x; y)$ en el punto $(x; y)$. Así, se tiene:

i) El error relativo o cambio relativo de f en $P(x; y)$ se estima por

$$E.R.\big(f(P)\big) = \frac{\Delta f(P)}{f(P)} \cong \frac{df(P)}{f(P)}$$

ii) El error porcentual de f expresa el cambio de f como un porcentaje de su tamaño antes del cambio y se estima por

$$E.P.\big(f(P)\big) = \frac{\Delta f(P)}{f(P)} \times 100 \cong \frac{df(P)}{f(P)} \times 100$$

Ejemplo 42.- El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 20 cm y 50 cm respectivamente, con un posible error en la medición de 0,01 cm. Utilice diferenciales para estimar el error máximo y el error porcentual en el cálculo del volumen del cono.

Solución

El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, con lo cual su diferencial total es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = \frac{2\pi r h}{3}dr + \frac{\pi r^2}{3}dh$$

Como $r = 20, h = 50, dr = \Delta r = 0{,}01$ y $dh = \Delta h = 0{,}01$, entonces

$$dV = \frac{2000\pi}{3}(0{,}01) + \frac{400\pi}{3}(0{,}01) = 8\pi$$

Por tanto, el máximo error en el cálculo del volumen es aproximadamente 8π cm.
El error porcentual estimado en el cálculo del volumen es

$$E.P.(V) = \frac{dV}{V} \times 100 = \frac{8\pi}{\frac{20000\pi}{3}}(100) = 0{,}12\%$$

Ejemplo 43.- El error porcentual cometido en la medición de la altura de una torre es 1% , para lo cual se mide el ángulo de elevación hasta la parte superior desde el punto A situado a 40 m de su base. El ángulo medido es de 45° con un posible error de $\pm 0{,}5$ minutos. Suponiendo que el terreno ès plano, halle en forma aproximada el máximo error porcentual cometido en la medición de la distancia del punto A a la base de la torre.

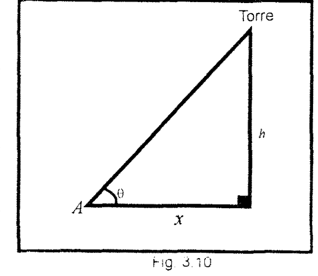


Fig. 3.10

Solución

Si x es la distancia del punto A a la base de la torre, θ el ángulo de elevación y h la altura de la torre, entonces de la figura 3.10 se tiene

$$h = x \tan\theta$$

Luego, la diferencial total de la altura es

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x}dx + \frac{\partial h}{\partial \theta}d\theta = \tan\theta\, dx + x\, sec^2\theta\, d\theta$$

De donde se obtiene

$$\frac{dh}{h} = \frac{\tan\theta}{h}dx + \frac{x\, sec^2\theta}{h}d\theta \qquad (*)$$

Ahora, de la relación de medidas entre grado y minuto se obtiene

$$\begin{cases} 1^\circ \to 60min \\ z \to 0{,}5\, min \end{cases} \Rightarrow z = \left(\frac{1}{120}\right)^\circ \; y \; \begin{cases} 180^\circ \to \pi\, rad \\ \left(\frac{1}{120}\right)^\circ \to y\, rad \end{cases} \Rightarrow y = \frac{\pi}{(120)(180)}rad$$

Luego, al reemplazar los datos

$$x = 40, \theta = 45^\circ, d\theta = 0{,}5\, min = \frac{\pi}{(120)(180)} = 0{,}000145\, rad$$

$$h = 40\tan 45^\circ = 40 \text{ y } \frac{dh}{h} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ en } (*), \text{ se tiene}$$

$$0{,}01 = \frac{tan\, 45^\circ}{40}dx + \left(\frac{40\, sec^2\,(45^\circ)}{40}\right)(0{,}000145) \Rightarrow dx = 0{,}3884$$

Por tanto, el error porcentual cometido en la medición de la distancia del punto A a la base de la torre es

$$E.P.(x) \cong \frac{dx}{x}(100) = \left(\frac{0{,}3884}{40}\right)(100) = 0{,}971\%$$

Ejemplo 44.- Si el radio y la altura de un cilindro aumentan en 0,5% y 1% respectivamente, ¿cuál es el cambio porcentual aproximado en su volumen?.

Solución

El volumen del cilindro de radio r y altura h es

$$V = \pi r^2 h$$

De donde resulta

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial h}dh = 2\pi rhdr + \pi r^2 dh$$

Como $E.P.(r) = \frac{dr}{r} \times 100 = 0{,}5$ y $E.P\,(h) = \frac{dh}{h} \times 100 = 1$, el cambio porcentual aproximado en el volumen del cono es

$$E.P.(V) \cong \frac{dV}{V} \times 100 = 2\ \frac{dr}{r} \times 100 + \frac{dh}{h} \times 100 = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 2\%$$

Ejemplo 45.- La resistencia total R de n resistencias $R_1, R_2, \dots, R_n$ conectadas en paralelo está dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Los valores de $R_1, R_2, \dots, R_n$ son 50, 100, 150, ...,50n ohmios respectivamente, con un error porcentual máximo de 0,8% en las mediciones. Estime el error porcentual máximo en el cálculo del valor de R.

Solución

Las derivadas parciales de R con respecto a R_i son

$$\frac{\partial R}{\partial R_i} = \frac{R^2}{R_i^2}, i = 1,2, \dots, n$$

De donde resulta

$$dR = \frac{R^2}{R_1^2}dR_1 + \frac{R^2}{R_2^2}dR_2 + \cdots + \frac{R^2}{R_n^2}dR_n$$

Como E.P.(R_i) $\cong \frac{dR_i}{R_i} \times (100) = 0{,}8\%$, $i = 1,2, \dots, n$, entonces el error porcentual de R es aproximadamente

$$E.P.(R) \cong \frac{R}{R_1}.\frac{dR_1}{R_1} \times 100 + \frac{R}{R_2}.\frac{dR_2}{R_2} \times 100 + \cdots + \frac{R}{R_n}.\frac{dR_n}{R_n} \times 100$$

$$\cong \frac{R}{R_1}(0{,}8\%) + \frac{R}{R_2}(0{,}8\%) + \cdots + \frac{R}{R_n}(0{,}8\%) = 0{,}8\%$$

Ejemplo 46.- Consideremos el triángulo isósceles T de la figura 3.11. ¿Cuál es aproximadamente el cambio que ocurre en el área de T si las longitudes de sus lados iguales aumentan en una pulgada y el ángulo en el vértice se incrementa en 0,04 radianes?

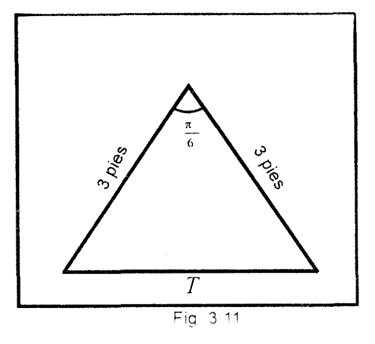


Fig 3.11

Solución

Si x es la medida de la longitud de los lados y α el ángulo comprendido entre ellos, entonces el área del triángulo es

$$A = \frac{1}{2}x^2\, sen\,(\alpha)$$

Luego,

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial \alpha}d\alpha = x\, sen\,(\alpha)dx + \frac{1}{2}x^2\cos(\alpha)d\alpha$$

Como $dx = \frac{1}{12}$ pies, $d\alpha = 0{,}04$ radianes; el cambio que ocurre en el área del triángulo es

$$dA \cong 3\, sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{12}\right) + \frac{1}{2}(3^2)\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)(0{,}04) \cong 0{,}28$$

Ejemplo 47.- Cuando se calcula el área de un trapecio isósceles se obtiene $256\ cm^2$ con un error porcentual de 4%. Si se sabe que al medir las longitudes de la base menor b, base mayor B y de la altura h, los errores de medición fueron iguales, halle los errores porcentuales al medir b, B y h respectivamente, cuando $b = 12$ cm, $B = 20$ cm y $h = 16$ cm.

Solución

El área del trapecio isósceles es

$$A = \frac{(b+B)h}{2}$$

De donde resulta

$$dA = \frac{\partial A}{\partial b}db + \frac{\partial A}{\partial B}dB + \frac{\partial A}{\partial h}dh = \frac{h}{2}db + \frac{h}{2}dB + \left(\frac{b+B}{2}\right)dh$$

Como $db = dB = dh$, $h = 16, b = 12$ y $B = 20$, el error aproximado en la medida del área es

$$dA = 8db + 8db + 16db = 32db \qquad (*)$$

Puesto que el área medida es $A = 256\ cm^2$ y su error porcentual 4%, se tiene

$$E.P.(A) = \frac{dA}{A} \times 100 = 4 \Leftrightarrow dA = \frac{4}{100}A = 10{,}24$$

Luego, de (*) se tiene

$$10{,}24 = 32db \Leftrightarrow db = \frac{10{,}24}{32} = 0{,}32 = dB = dh$$

Por tanto, los errores porcentuales al medir b, B y h son

$$E.P(b) \cong \frac{db}{b}(100) = \left(\frac{0{,}32}{12}\right)(100) = 2{,}67\%$$

$$E.P(B) \cong \frac{dB}{B}(100) = \left(\frac{0{,}32}{20}\right)(100) = 1{,}6\%$$

$$E.P(h) \cong \frac{dh}{h}(100) = \left(\frac{0{,}32}{16}\right)(100) = 2\%$$

Ejemplo 48.- La utilidad mensual en nuevos soles de una empresa que comercializa un solo producto es dada por

$$U(x; y) = \frac{1}{50}(x^2 + 2xy),$$

donde x representa el número de unidades vendidas en Lima e y el número de unidades vendidas en Arequipa. Si en la actualidad la empresa vende 200 unidades en Lima y 300 unidades en Arequipa, estime el cambio aproximado en la utilidad de la empresa si las ventas en Lima disminuyen en 1%, mientras que en Arequipa aumentan en 2%.

Solución

Como las ventas de la empresa disminuyen en Lima en un 1% y aumentan en Arequipa en un 2%, entonces se tiene

$$dx = \Delta x = -200(0{,}01) = -2 \text{ y } dy = \Delta y = 300(0{,}02) = 6$$

La diferencial total de la utilidad es

$$dU(x; y) = U_x(x; y)dx + U_y(x; y)dy = \frac{1}{25}(x + y)dx + \frac{x}{25}dy$$

Para $x = 200$ y $y = 300$, se tiene

$$dU(200; 300) = 20\,dx + 8dy = 20(-2) + 8(6) = 8$$

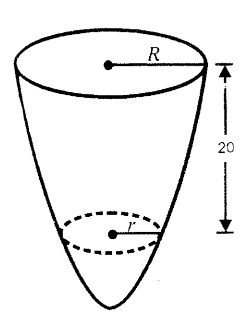
Luego, $\Delta U(200; 300) \cong dU(200; 300) = 8$

Por tanto, la utilidad mensual de la empresa aumenta aproximadamente en S/. 8 mensual.

Ejemplo 49.- Se fabrica un recipiente sin tapa que tiene la forma de un tronco de cono circular con base una semiesfera, tal como se muestra en la figura adjunta. Las dimensiones del recipiente son

$R = 18cm$ y $r = 12\ cm$

Si al recipiente se desea bañar con una capa de plata de 0,01 cm de espesor, estime el volumen aproximado de plata que se necesita para bañar la superficie exterior.



Solución

El volumen del tronco de cono circular recto de radio mayor R, radio menor r y altura h es

$$V_{TC} = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2) = \frac{20\pi}{3}(r^2 + rR + R^2)$$

y de la esfera de radio r es

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Luego, el volumen del recipiente es

$$V = \frac{20\pi}{3}(r^2 + rR + R^2) + \frac{2\pi}{3}r^3$$

La diferencial total del volumen V es

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial R}dR = \frac{\pi}{3}(40r + 6r^2 + 20R)dr + \frac{\pi}{3}(20r + 40R)dR$$

Para $R = 18, r = 12, dR = \Delta R = 0{,}01$ y $dr = \Delta r = 0{,}01$; se tiene

$$dV = \frac{\pi}{3}(480 + 864 + 360)(0{,}01) + \frac{\pi}{3}(240 + 720)(0{,}01) = 8{,}88\pi$$

Por tanto, para bañar la superficie exterior del recipiente se necesita aproximadamente $\Delta V \cong 8{,}88\pi\ cm^3$ de plata.

Ejemplo 50.- Sea $f(x;y) = (x^3 + y^3)\sqrt{x^2 + y^2}$, ¿es f diferenciable en $(0;0)$?

Solución

Por el Teorema 7 podemos ver que f es diferenciable en $(0;0)$ si

$$f(x;y), \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \ \ y \ \ \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \text{ son continuas en } (0;0).$$

i) Como $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y) = 0 = f(0;0)$, concluimos que f es continua en (0;0)

ii) La derivada parcial de f con respecto a x es

$$h(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = \begin{cases} 3x^2\sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{x(x^3 + y^3)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , si\ (x;y) \neq (0;0) \\ 0 & , si\ (x;y) = (0;0) \end{cases}$$

$$\text{pues, } \frac{\partial f(0;0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h;0) - f(0;0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2|h| = 0$$

Ahora, al utilizar coordenadas polares, se obtiene

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} h(x;y) = \lim_{r\to 0}[3r^3\cos^2\theta + r^2\cos\theta\ (\cos^3\theta + sen^3\theta)] = 0 = h(0;0)$$

Así, $h(x;y) = \dfrac{\partial f(x;y)}{\partial x}$ es continua en $(0;0)$

iii) La derivada parcial de f con respecto a y es dada por

$$H(x;y)=\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}=\begin{cases}3y^2\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{y(x^3+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & ,\quad si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

donde $\dfrac{\partial f(0;0)}{\partial y}=\lim\limits_{k\to o}\dfrac{f(0;k)-f(0;0)}{k}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{k^3\sqrt{k^2}}{k}=\lim\limits_{k\to 0}k^2|k|=0$

En forma similar, al usar coordenadas polares se tiene

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)}H(x;y)=\lim_{r\to 0}[3r^3\,sen^2\theta+r^2\,sen\,\theta(cos^3\theta+sen^3\theta)]=0$$
$$=H(0;0)$$

Luego, $\dfrac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ es continua en $(0;0)$

Por consiguiente, $f(x;y)$ es diferenciable en $(0;0)$.

EJERCICIOS

1.- Sea $f(x;y)=\begin{cases}\sqrt[3]{xy}+\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & ,si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & ,\quad si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$

¿Es f diferenciable en los puntos $(0;0),(0;1),(1;1)$? Justifique R. no, no, si

2.- Sea la función

$$f(x;y)=\begin{cases}e^x+e^y+\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 2 & ,\quad si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$$

Analice la diferenciabilidad en $(x;y)=(0;0)$ R. no es diferenciable

3.- Para las siguientes funciones, analice la diferenciabilidad en el punto (0;0)

a) $f(x;y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & ,\quad si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$

b) $f(x;y)=\begin{cases}x\,sen\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right) & ,si\ (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & ,\quad si\ (x;y)=(0;0)\end{cases}$

4 .- Sea la función $f(x;y)=\sqrt{|xy|},(x;y)\in\mathbb{R}^2$. Determine el conjunto de puntos donde f no es diferenciable. R. f no es diferenciable en los eje X e Y.

5.- En cada uno de los ejercicios halle $df(x;y)$ y $\Delta f(x;y)$ para los valores dados de $x, y, \Delta x$ y Δy.

a) $f(x;y) = x^2 - xy + y^2, x = 2, y = -1, \Delta x = -0{,}01, \Delta y = 0{,}02$

b) $f(x;y) = sen\, xy + \cos(x+y), x = \frac{\pi}{6}, y = 0, \Delta x = 2\pi, \Delta y = 3\pi$

c) $f(x;y) = e^{xy} sen\,(x+y), x = \frac{\pi}{4}, y = 0, \Delta x = -\frac{\pi}{4}, \Delta y = 4\pi$

d) $f(x;y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, x = 3, y = 1, \Delta x = -0{,}1, \Delta y = 0{,}05$

e) $f(x;y;z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - xz$
$(x;y;z) = (2;-1;3), (\Delta x; \Delta y; \Delta z) = (0{,}01; 0{,}02; 0{,}03)$

f) $f(x;y;z) = sen\,(x+y) - \cos(x-z) + sen\,(y+2z)$

$(x;y;z) = \left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; 0\right), (\Delta x; \Delta y; \Delta z) = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$

6.- Halle el valor aproximado de las siguientes cantidades utilizando diferenciales.

a) $\sqrt{(5{,}02)^2 + (11{,}97)^2}$ b) $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}99)^2 + (5{,}97)^2}$

c) $(3{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (6{,}02)^2 + (1{,}97)^{-1/2}$ R. 0,111427

d) $sen\, 32° \cos 59°$ R. 0,273

e) $\ln[(1{,}1)^3 + (2{,}3)^3] - \ln 9$ R. 0,43

7.- Un envase de metal que tiene la forma de un cilindro circular recto tiene una altura interior de 8 pulgadas, un radio interior de 3 pulgadas y un espesor de 0,2 pulgadas. Si el costo del metal que va a ser usado en su construcción cuesta S/. 10 por $pulg^3$, encuentre el costo aproximado del metal que se usará en la manufactura del envase. R. S/. 132π

8.- La gravedad específica S de un objeto está dada por la fórmula $S = \frac{A}{A-W}$ donde A es el número de libras de peso del objeto en el aire y W es el número de libras del peso del objeto en el agua. Si el peso de un objeto en el aire es 20 libras con un posible error de 0,01 libras, y su peso en el agua es 12 libras con un posible error de 0,02 libras, encuentre el máximo error posible al calcular S a partir de estas medidas. También halle el máximo error porcentual.

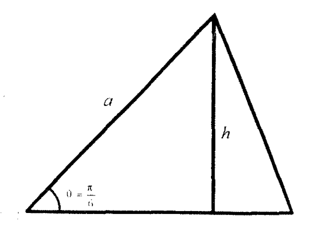
$R.\ \frac{7}{1600}; 0{,}18\%$

9.- Una compañía va a manufacturar 10000 cajas de madera cerradas con dimensiones 3 pies, 4 pies y 5 pies. El costo de la madera que va a ser usada es de 5 soles por pie cuadrado. Si las máquinas que se usan para cortar las piezas de madera tienen un posible error de 0,05 pies en cada dimensión, halle aproximadamente usando la diferencial total, el máximo error posible en la estimación del costo de la madera. R. 120000 soles

10.- Si cada individuo y cada corporación en la economía de un país gasta una proporción x de cada sol recibido, entonces por el principio multiplicador (keynes), la cantidad de dinero generada por la infusión de y soles es $\dfrac{y}{1-x}$

Si y se incrementa de 1 a 1,03 millones y x disminuye de 0,6 a 0,58, ¿Cuál es el cambio aproximado en el monto de dinero generado?, ¿aumenta o disminuye?

11.- Al medir un triángulo se encuentra que los lados tienen longitudes de 50 pulg. y 70 pulg. y el ángulo comprendido entre ellos es de 30°. Si existen errores posibles de 1/2 % en la medida de los lados y 1 /2 grado en la del ángulo. Halle el máximo error aproximado en la medida del área. R. 2,5%



12.- La ecuación $P = \dfrac{kT}{V}$, donde k constante, expresa la presión P de un gas encerrado, de volumen V y temperatura T. Calcule aproximadamente el porcentaje de error máximo que se comete en P cuando el error en la medida de T y V es de 1,4% y 0,9% respectivamente..

R. Porcentaje de error máximo de P es 0,5%

13.- Se desea embalar un televisor cuyas dimensiones son: 55 cm de largo, 40 cm de ancho y 80 cm de altura, con un material homogéneo cuyo peso es de 1/20 gramos por cm^3. Si el grosor del embalaje lateral debe ser de 5 cm mientras que el de la base y la parte superior de 2,5 cm cada uno, use diferenciales y calcule aproximadamente el peso de la envoltura.

14.- Cuando un medicamento se ingiere, el tiempo T en el que hay mayor cantidad del producto en la sangre se puede calcular en términos de la semivida "x" del medicamento en el estómago, y la semivida "y" en la sangre. Para fármacos comunes T está dado por

$$T = \frac{xy(\ln x - \ln y)}{(x-y)\ln 2}$$

Para un medicamento en particular $x = 30$ min e $y = 1$ hora. ¿Cuál es el máximo error porcentual en el cálculo de T si el error máximo en la estimación de las semividas es de 10%? R. 10%

15.- El radio de la base y la altura de un cono circular recto miden 6 cm y 8 cm respectivamente, con un posible error en la medición de 0,1 cm en cada dimensión. Utilice diferenciales para estimar el error máximo posible en el cálculo del área de la superficie lateral.

(Sug. Área lateral= $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$) R. $1{,}84\pi\ cm^2$

16.- Se tiene un cilindro circular recto metálico cuyas dimensiones son 2 metros de altura y 1 metro de radio en la base. Se desea pintar exteriormente con una capa de pintura de 0,002 m de espesor tanto en la parte lateral, como en las bases. Use diferenciales para estimar la cantidad de pintura que será necesario.

R. $0{,}012\pi\ m^3$

17.- La producción mensual de la fábrica Sajita S.A. es

$P(x;y) = 60x^{1/3}y^{1/2}$ unidades

donde x representa el capital invertido en miles de soles e y el trabajo medido en horas de trabajo. En la actualidad, el capital mensual invertido es de 8000 soles y se emplean cada mes 900 horas de trabajo.

a) Calcule la producción actual

b) Halle el aumento aproximado en la producción de la empresa que resultó de aumentar el capital en 2000 soles y la fuerza de trabajo en 2 horas.

R. a) 3600 unidades b) aumenta en 154 unidades.

18.- Se quiere construir una pieza mecánica de acero que tiene la forma de un paralelepípedo recto de base cuadrada. Si al medir el lado del cuadrado de la base y al calcular el volumen de dicha pieza mecánica se han cometido errores de 1% y 4% respectivamente, ¿cuál es el error porcentual cometido al medir la altura del paralelepípedo? R. 2%

19.- El ancho, el largo y la profundidad de un tanque que tiene la forma de un paralelepípedo rectangular han sido medidos con errores de 2%, 1,5% y 2,5% respectivamente. Estime el error porcentual máximo al calcular el volumen de dicho tanque. R. 6%

3.6 REGLAS DE LA CADENA PARA UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Recordemos que la regla de la cadena para funciones diferenciables de una variable establece que si $y = f(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces la derivada de la función compuesta $y = f(g(x))$ es dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

En el siguiente Teorema consideraremos la regla de la cadena para funciones de dos variables, donde cada una de las variables independientes es también función de dos o más variables independientes.

Teorema 8.- Sea $z = f(x; y)$ una función diferenciable de x e y. Si $x = f(r; s)$ y $y = f(x; y)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden

$\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial r}$ y $\frac{\partial y}{\partial s}$ existen; entonces la función f es de forma indirecta función de r y s, y se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \ldots \quad (2)$$

El diagrama de árbol de dependencias de la figura 3.12 facilita el cálculo de las derivadas parciales dadas en las igualdades (1) y (2).

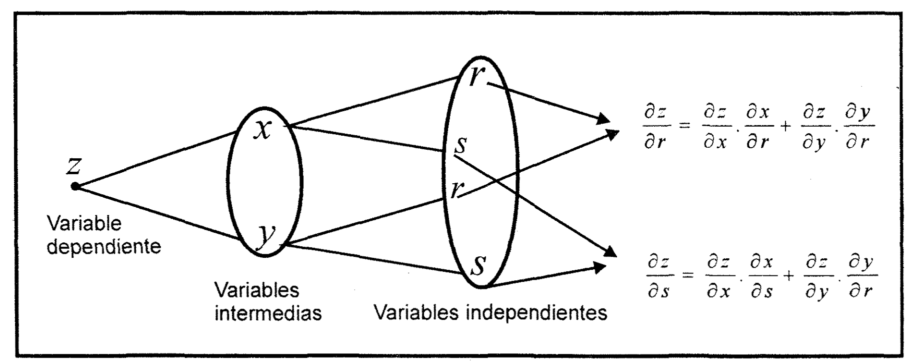


Fig. 3.12

Teorema 9.- (Regla de la cadena general). Sea $z = f(x_1; ...; x_n)$ una función diferenciable de n variables, donde cada x_i es una función diferenciable de variables $t_1, ... t_m$, esto es,

$$x_i = F_i(t_1, ..., t_m) \text{ y } \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, i = 1,2, ..., n \text{ y } j = 1,2, ..., m \text{ existen.}$$

Entonces la función $z = f(x_1; ...; x_n)$ es de forma indirecta función de $t_1, ..., t_m$ y se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial t_1} = \frac{\partial z}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_2} = \frac{\partial z}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial z}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial t_2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t_m} = \frac{\partial z}{\partial x_1}.\frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial z}{\partial x_2}.\frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}.\frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

Corolario.- Sea $z = f(x_1, ..., x_n)$ una función diferenciable de n variables. Si cada $x_i (i = 1,2, ..., n)$ es una función derivable de una única variable t, entonces z es función de t y la derivada total de z con respecto a t es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}.\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}.\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}.\frac{dx_n}{dt}$$

Ejemplo 51.- Calcule, mediante la regla de la cadena las derivadas parciales que se indican a continuación:

a) $\frac{\partial z}{\partial r}$ y $\frac{\partial z}{\partial s}$, siendo $z = e^x \ln(y)$, $x = s + 2r$, $y = rs$

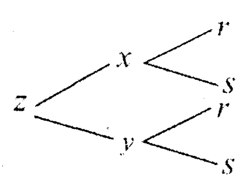
b) $\frac{\partial w}{\partial r}$ y $\frac{\partial w}{\partial s}$, siendo $w = zy^2 + x^3 + y$, $x = r^2 + s$, $y = -r + s$, $z = \frac{r}{s}$

c) $\frac{dz}{dt}$, siendo $z = xy^2 - y$, $x = e^{-t}$, $y = sen\, t$

Solución

a) La regla de la cadena para este caso es

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$



$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}$$

Las derivadas parciales de z con respecto a x e y son

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x}\ln y\ ,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^{x}}{y}$$

y las derivadas parciales de x e y con respecto a r y s son

$$\frac{\partial x}{\partial r}=2,\quad \frac{\partial x}{\partial s}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=s\ \text{ y }\ \frac{\partial y}{\partial s}=r$$

Luego, al reemplazar cada una de estas derivadas parciales en la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial r}=(e^{x}\ln y).2+\frac{e^{x}}{y}.s=2e^{s+2r}.\ln(rs)+\frac{e^{s+2r}}{r}$$

b) La regla de la cadena para este caso es

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial s}$$

Las derivadas parciales de w con respecto a x, y y z son

$$\frac{\partial w}{\partial x}=3x^{2},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=2zy+1,\quad \frac{\partial w}{\partial z}=y^{2}$$

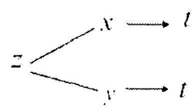
y las derivadas parciales de x, y y z con respecto a r y s son

$$\frac{\partial x}{\partial r}=2r,\quad \frac{\partial x}{\partial s}=1,\quad \frac{\partial y}{\partial r}=-1,\quad \frac{\partial y}{\partial s}=1,\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{s},\quad \frac{\partial z}{\partial s}=-\frac{r}{s^{2}}$$

Luego, al reemplazar cada una de estas derivadas parciales en la regla de la cadena, resulta

$$\frac{\partial w}{\partial r}=(3x^{2}).2r+(2zy+1).(-1)+y^{2}.\frac{1}{s}$$
$$=6r^{5}+12r^{3}s+6rs^{2}+\frac{3r^{2}}{s}-4r+s-1$$
$$\frac{\partial w}{\partial s}=(3x^{2})(1)+(2zy+1)(1)+y^{2}\left(-\frac{r}{s^{2}}\right)$$
$$=3r^{4}+6r^{2}s+3s^{2}-\frac{r^{3}}{s^{2}}+r+1$$

c) La regla de la cadena para la derivada total es



$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}.+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Las derivadas parciales de z con respecto a x e y son

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2xy-1$$

y las derivadas ordinarias de x e y con respecto a t son

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t},\quad \frac{dy}{dt}=\cos t$$

Luego, al reemplazar cada una de estas derivadas en la regla de la cadena, resulta

$$\frac{dz}{dt}=y^2.(-e^{-t})+(2xy-1).\cos t$$

$$=-e^{-t}\,sen^2 t+2e^{-t}\,sen\,t\cos t-\cos t$$

Ejemplo 52.- Muestre que la sustitución $x=e^s\,,y=e^t$ convierte la ecuación

$$x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

en la ecuación $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$, donde $u=f(x;y)$

Solución

La regla de la cadena para la función $u=f(x;y)$ es

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s}=e^s.\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}=e^s.\frac{\partial u}{\partial y}$$

Al derivar cada una de estas funciones con respecto a s y t, se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial s}\left[e^s.\frac{\partial u}{\partial x}\right]=e^s.\frac{\partial u}{\partial x}+e^s.\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\quad \text{(Por regla del producto)}$$

$$=e^s.\frac{\partial u}{\partial x}+e^s\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.\frac{\partial y}{\partial s}\right]$$

$$= e^s.\frac{\partial u}{\partial x} + e^s\left[e^s.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0\right] = x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[e^t.\frac{\partial u}{\partial y}\right] = e^t.\frac{\partial u}{\partial y} + e^t.\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \text{ (Por regla del producto)}$$

$$= e^t.\frac{\partial u}{\partial y} + e^t\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\frac{\partial y}{\partial t}\right]$$

$$= e^t.\frac{\partial u}{\partial y} + e^t\left[e^t.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 0\right] = y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Por tanto, $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^t u}{\partial t^2} = x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$

Ejemplo 53.- Una lancha se dirige hacia el sur con una velocidad de 8 km/h y otra hacia el este a 12 km/h. A las 16 horas, la segunda lancha pasa por el punto donde la primera estuvo hace tres horas.

a) ¿Cómo varía la distancia entre ellas a las 15 horas?

b) ¿Cómo varía la distancia entre ellas a las 17 horas?

Solución

a) A las 15 horas, las lanchas se encuentran en los puntos A y B (Fig. 3.13), cuya distancia entre ellas es dada por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

z → x → t; z → y → t

También, a las 15 horas la primera lancha se encuentra a $y = 16$ km del punto de cruce y la segunda a $x = 12$ km del punto de cruce.

Al aplicar la regla de la cadena, resulta

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\frac{dy}{dt}$$

Luego, para los datos $x = 12,\ y = 16,\ \frac{dx}{dt} = -12$ y $\frac{dy}{dt} = 8$, se tiene

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{12}{20}\right)(-12) + \left(\frac{16}{20}\right)(8) = -0{,}8$$

Por tanto, la distancia entre las lanchas disminuye a una velocidad de 0,8 km/h.

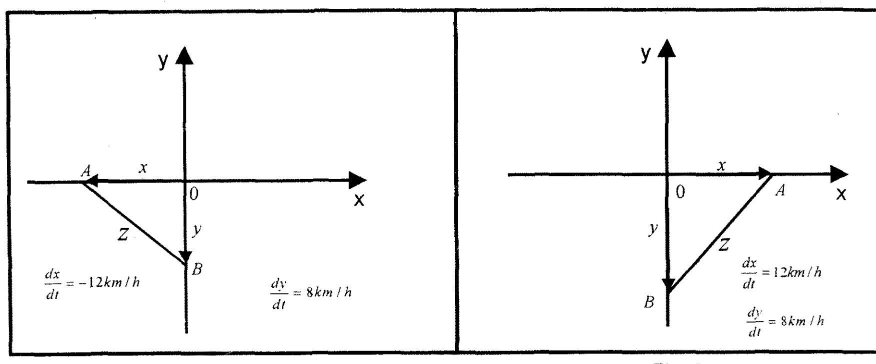


Fig 3.13 Fig 3.14

b) En forma similar, a las 17 horas (Fig. 3.14) $x = 12$ km, $y = 32$ km y la distancia entre las lanchas es dada por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Luego, la regla de la cadena en este caso es

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.\frac{dy}{dt}$$

Luego, para los datos $x = 12,\ \ y = 32,\ \ \frac{dx}{dt} = 12$ y $\frac{dy}{dt} = 8$, resulta

$$\frac{dz}{dt} = \frac{12}{\sqrt{12^2 + 32^2}}(12) + \frac{32}{\sqrt{12^2 + 32^2}}(8) = 11{,}7$$

Por consiguiente, a las 17 horas, la distancia entre las lanchas aumenta a una velocidad de 11,7 km/h.

Ejemplo 54.- Una piscina tiene 22 pies de ancho, 56 pies de largo, 5 pies de profundidad en un extremo y 12 pies en el otro extremo, siendo el fondo un plano inclinado. Si la piscina está llenándose con un caudal de $20\ pies^3/seg$, ¿a qué velocidad se está elevando el nivel de agua cuando dicho nivel es de 7 pies en el extremo más profundo?

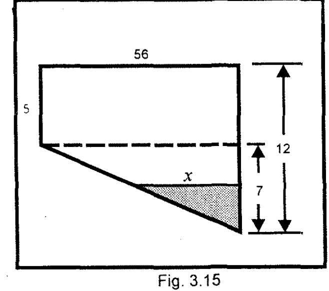


Fig. 3.15

Solución

De la figura 3.15, el volumen de agua en la piscina viene dada por

$$V = \frac{1}{2}(xy)(22) = 11xy$$

La regla de la cadena en este caso es

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}.\frac{dy}{dt}=11y\frac{dx}{dt}+11x\frac{dy}{dt} \quad ... \quad (1)$$

Por semejanza de triángulos (Fig. 3.15), se tiene

$$\frac{y}{7}=\frac{x}{56}$$

Luego, al derivar con respecto a t ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$\frac{1}{7}.\frac{dy}{dt}=\frac{1}{56}.\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}=8.\frac{dy}{dt} \quad ... \quad (2)$$

Así, al reemplazar (2) en (1) resulta

$$\frac{dV}{dt}=88y\frac{dy}{dt}+11(8y)\frac{dy}{dt}=176y\frac{dy}{dt}$$

Al sustituir $y=7$ y $\frac{dV}{dt}=20\ pies^3/\ seg$, se obtiene

$$20=176(7)\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt}=0{,}01623$$

Por tanto, cuando la profundidad del agua es 7 pies, el nivel del agua aumenta a una velocidad de 0,01623 pies/seg.

Ejemplo 55.- En un instante dado, la longitud de un cateto de un triángulo es 20 pies y está aumentando a razón de 2 pies/seg. y la longitud del otro cateto es 24 pies y está disminuyendo a razón de 4 pies/seg. Encuentre la rapidez de cambio de la medida del ángulo agudo opuesto al cateto de longitud de 24 pies en el instante dado.

Solución

Sean x, y y θ las medidas de los catetos y el ángulo del triángulo rectángulo (Fig. 3.16). Luego, se tiene

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \Leftrightarrow \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

La regla de la cadena para la variable θ es

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\partial\theta}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\theta}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

$$=-\frac{y}{x^2+y^2}.\frac{dx}{dt}+\frac{x}{x^2+y^2}.\frac{dy}{dt}$$

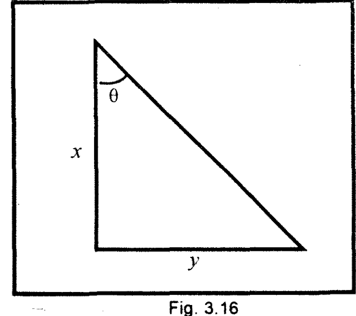


Fig. 3.16

Al sustituir los datos $x = 20, y = 24$, $\frac{dx}{dt} = 2\, pies\,/seg$ y $\frac{dy}{dt} = -4\, pies/\,seg$ en la regla de la cadena, se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{24}{20^2 + 24^2}(2) + \frac{20}{20^2 + 24^2}(-4) = -\frac{128}{976} = -0{,}131$$

Luego, el ángulo agudo θ disminuye a una razón de 0,131 rad/seg.

Ejemplo 56.- Un filtro cónico de 18 cm de profundidad y 6 cm de radio en la parte superior, se encuentra llena de una solución. La solución va pasando a un vaso cilíndrico de 3 cm de radio. Cuando la profundidad de la solución en el filtro es 12 cm y el radio 4 cm, su nivel está bajando a razón de 2cm/seg y el radio va decreciendo a razón de 2/3 cm/seg. Halle la rapidez con que está subiendo la solución en el vaso, para dichas medidas.

Solución

En la figura 3.17 se observa que el volumen de la solución en el filtro cónico de radio r y altura h es dado por

$$V_h = V_{cono} - V_H$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6)^2(18) - \pi(3)^2 H$$

Fig. 3.17

De donde resulta

$$H = 24 - \frac{r^2 h}{27}$$

Luego, la derivada total de H con respecto a t es

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dt} + \frac{\partial H}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dt} = -\frac{2rh}{27}\cdot\frac{dr}{dt} - \frac{r^2}{27}\cdot\frac{dh}{dt}$$

Al sustituir los datos $r = 4$, $h = 12$, $\frac{dh}{dt} = -2\, cm/\,seg$ y $\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3} cm\,/seg$ en la derivada total, resulta

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{2(4)(12)}{27}\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{4^2}{27}(-2) = \frac{32}{9}$$

Por tanto, la solución en el vaso cilíndrico sube a una velocidad de 32/9 cm/seg.

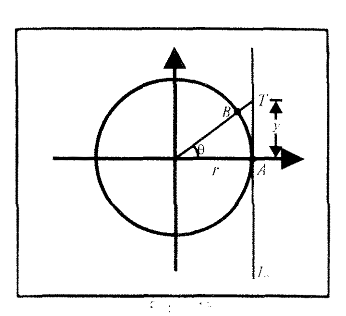
Ejemplo 57.- Un corredor va por una pista circular de 40 metros de radio a razón de 8 m/seg. En el centro de ésta hay una luz, la sombra del corredor se proyecta

sobre un muro recto tangente a la pista en el punto de partida. ¿Con qué rapidez se mueve la sombra cuando lleva recorrido 1/8 de la pista?

Solución

El arco $S = \widehat{AB}$ recorrida por el atleta es dado por

$$S = r\theta$$



Como la sombra del corredor se proyecta sobre la recta tangente L_T, entonces se tiene (Fig. 3.18)

$$tan\ \theta = \frac{y}{r}$$

Luego, la distancia recorrida por la sombra del corredor ($\overline{AT} = y$) viene dada por

$y = r\tan\theta$ ($r = 40m$ fijo)

La derivada total de las variables y y S con respecto al tiempo t son

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r}.\frac{dr}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \theta}.\frac{d\theta}{dt} = \tan\theta\ (0) + rsec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = rsec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial r}.\frac{dr}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \theta}.\frac{d\theta}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

De estas dos ecuaciones, resulta

$$\frac{dy}{dt} = sec^2\theta.\frac{d\theta}{dt}$$

Al sustituir los datos $\theta = \frac{1}{8}$ (longitud de la pista) $= \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ y $\frac{dS}{dt} = 8\,m/seg$ en la derivada total $\frac{dy}{dt}$, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = 2(8) = 16$$

Por consiguiente, la sombra del corredor se mueve sobre la recta tangente a una rapidez de 16 m/seg.

Ejemplo 58.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tal que

$f(18;0) = 4$ y $D_1f(18;0) = D_2f(18;0) = 3$

Si $H(x;y;z) = f(x^2 - y^2 + z^2; y^2 - z^2 + x^2)$, halle la ecuación del plano tangente a la superficie $S: H(x;y;z) = 0$ en el punto $P_0(3;-4;5)$

Solución

Al considerar $u = x^2 - y^2 + z^2$, $v = y^2 - z^2 + x^2$ y $H(x; y; z) = f(u; v) = 0$, se tiene

$$\frac{\partial H(x; y; z)}{\partial x} = \frac{\partial f(u; v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u; v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= D_1 f(u; v).2x + D_2 f(u; v).2x$$

$$\frac{\partial H(x; y; z)}{\partial y} = \frac{\partial f(u; v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f(u; v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= D_1 f(u; v).(-2y) + D_2 f(u; v).(2y)$$

$$\frac{\partial H(x; y; z)}{\partial z} = \frac{\partial f(u; v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f(u; v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$= D_1 f(u; v).(2z) + D_2 f(u; v).(-2z)$$

Al evaluar estas derivadas parciales en el punto $P_0(3; -4; 5)$, se tiene

$$\frac{\partial H(3; -4; 5)}{\partial x} = 36, \quad \frac{\partial H(3; -4; 5)}{\partial y} = 0 \text{ y } \frac{\partial H(3; -4; 5)}{\partial z} = 0$$

Por tanto, la ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $P_0(3; -4; 5)$ es

$$P_T: 36(x - 3) + 0(y + 4) + 0(z - 5) \Leftrightarrow P_T: x = 3$$

Ejemplo 59.- Sea f una función diferenciable, tal que

$$f(2; 2) = 2, \quad D_1 f(2; 2) = -2 \text{ y } D_2 f(2; 2) = 4$$

Si $g(x) = f(x; f(x; f(x; x)))$, halle $g(2)$ y $g'(2)$.

Solución

i) $g(2) = f(2; f(2; f(2; 2))) = f(2; f(2; 2)) = f(2; 2) = 2$

ii) Al considerar $v(x) = f(x; x)$, $u(x) = f(x; v(x))$ y $g(x) = f(x; u(x))$, se tiene

$$g'(x) = D_1 f(x; u(x)).1 + D_2 f(x; u(x)).u'(x)$$

$$= D_1 f(x; u(x)) + D_2 f(x; u(x))[D_1 f(x; v(x)) + D_2 f(x; v(x)).v'(x)]$$

$$= D_1 f(x; u(x)) + D_2 f(x; u(x)) D_1 f(x; v(x)) +$$

$$+ D_2 f(x; u(x)) D_2 f(x; v(x))[D_1 f(x; x) + D_2 f(x: x)]$$

Luego, al evaluar en $x = 2$ resulta

$g'(2) = -2 + 4[-2 + 4[-2 + 4]] = 22$

Ejemplo 60.- Transforme la ecuación $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0$, al tomar como variables independientes a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

Solución

El diagrama de árbol de dependencias se muestra en la figura 3.19. La regla de la cadena para w viene dada por

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial w}{\partial \theta}\left(-\frac{y}{r^2}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial w}{\partial r}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial w}{\partial \theta}\left(\frac{x}{r^2}\right)$$

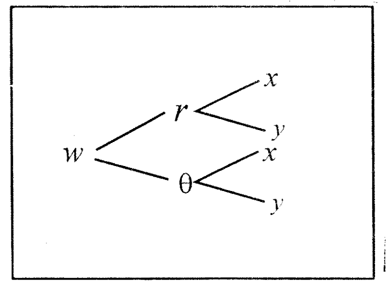


Fig 3 19

Al sumar los cuadrados de las derivadas parciales $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$, se obtiene

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

Por tanto, la ecuación resultante es

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

3.7 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Se dice que la ecuación

$$F(x; y; z) = 0 \qquad (*)$$

define en forma implícita a la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si al sustituir $z = f(x; y)$ en la ecuación (*), ésta se reduce a una identidad, esto es,

$$F(x; y; f(x; y)) = 0, \forall (x; y) \in D$$

Por ejemplo, la ecuación

$$F(x; y; z) = 3x^2 + 4y^2 + z^2 - 12 = 0$$

representa en forma implícita a las funciones

$z = f(x; y) = \sqrt{12 - 3x^2 - 4y^2}$ y $z = g(x; y) = -\sqrt{12 - 3x^2 - 4y^2}$

Teorema de la Función Implícita 10.- Sea $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una función real de $n+1$ variables tal que:

i) $F(x_1; \ldots; x_n; z) = 0 \quad \ldots \quad (*)$

ii) F tiene derivadas parciales continuas en la vecindad del punto $P(x_1; \ldots; x_n; z)$

iii) $\dfrac{\partial F(P)}{\partial z} \neq 0$

Entonces la ecuación (*) representa a z en forma implícita como función de $x_1; \ldots; x_n$, esto es, $z = f(x_1; \ldots; x_n)$ y para $P(x_1; \ldots; x_n; z) \in D$, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_1; \ldots; x_n)}{\partial x_i} = -\frac{\dfrac{\partial F(x_1; \ldots; x_n; z)}{\partial x_i}}{\dfrac{F(x_1; \ldots; x_n; z)}{\partial z}}, i = 1,2, \ldots, n$$

Ejemplo 61.- Halle $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $z = f(x; y)$ satisface la ecuación

$$xy^2 + yz^2 + z^3 + x^3 - 4 = 0$$

Solución

Sea $F(x; y; z) = xy^2 + yz^2 + z^3 + x^3 - 4 = 0$

Las derivadas parciales de F con respecto a x, y y z son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 + 3x^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + z^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2yz + 3z^2$$

Luego, al reemplazar cada una de estas derivadas en la forma de la derivación implícita, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{y^2 + 3x^2}{2yz + 3z^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xy + z^2}{2yz + 3z^2}$$

Ejemplo 62.- si u, v son funciones de x e y definidas implícitamente en alguna región del plano XY por las ecuaciones

$$\begin{cases} u\, sen\, v + x^2 = 0 \\ u \cos v - y^2 = 0 \end{cases}$$

Halle $E = y\dfrac{\partial u}{\partial y} - x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\left(y^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + 600$

Solución

Al derivar en forma implícita ambas ecuaciones con respecto a x, se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} sen\ v + u\cos v \dfrac{\partial v}{\partial x} + 2x = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} \cos v - u\ sen\ v\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Luego, por la regla de Cramer las variables $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ vienen dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & u\cos v \\ 0 & -u\ sen\ v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} sen\ v & u\cos v \\ \cos v & -u\ sen\ v \end{vmatrix}} = \frac{2xu\ sen\ v}{-u(sen^2 v + cos^2 v)} = -2x\ sen\ v$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} sen\ v & -2x \\ \cos v & 0 \end{vmatrix}}{-u} = -\frac{2x\cos v}{u}$$

En forma similar, se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y\cos(v) \ \text{ y } \ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2y\ sen\ v}{u}$$

Las derivadas parciales de segundo orden son:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{u\left[2\cos v - 2x\ sen\ v.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right] -.2x\cos v\,.\dfrac{\partial u}{\partial x}}{u^2}$$

$$= -\frac{2u\cos v + 8x^2\ sen\ v\cos v}{u^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{u\left[2\,\text{sen}\,v + 2y\ cos\ v.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right] - 2y\,\text{sen}\,v\,.\dfrac{\partial u}{\partial y}}{u^2}$$

$$= -\frac{2u\,\text{sen}\,v - 8y^2\ sen\ v\cos v}{u^2}$$

Luego, al sustituir estas derivadas parciales en la expresión de E, se obtiene

$$E = y\frac{\partial u}{\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} + u\left[y^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right] + 600 = 600$$

Ejemplo 63.- Si $f(x - z; y - z) = 0$ define en forma implícita a z como función de x e y, halle $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$

Solución

Al considerar $a = x - z$ y $b = y - z$, se tiene

$$F(x; y; z) = f(a; b) = 0$$

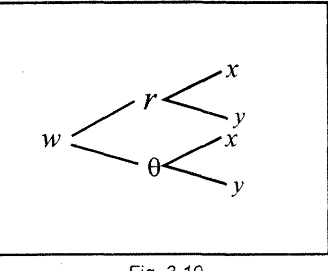


Fig. 3.19

Luego, al aplicar la regla de la cadena y la fórmula de la derivación implícita, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial a} . \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial a} . \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial b} . \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial b}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial a} . \frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial b} . \frac{\partial b}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial a} - \frac{\partial F}{\partial b} = -\frac{\partial f}{\partial a} - \frac{\partial f}{\partial b}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}}$$

Por consiguiente, $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$

Ejemplo 64.- Si $z + e^x \, sen\,(y + z) - 1 = 0$ define a z en forma implícita como función de x e y, halle $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ en el punto $(0; \frac{\pi}{2}; 0)$

Solución

Sea $F(x; y; z) = z + e^x \, sen\,(y + z) - 1 = 0$. Luego, al aplicar las fórmulas de derivación implícita, se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{e^x sen\,(y + z)}{1 + e^x \cos(y + z)} \; ; \; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{e^x cos\,(y + z)}{1 + e^x \cos(y + z)}$$

$$E = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$= -\frac{e^x[\cos(y + z) + e^x \, cos^2(y + z)]\left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + e^{2x} \, sen^2(y + z)\left[1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right]}{[1 + e^x \cos(y + z)]^2}$$

Al evaluar la derivada parcial de segundo orden en el punto $P_0\left(0; \frac{\pi}{2}; 0\right)$, resulta

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right]_{\left(0;\frac{\pi}{2};0\right)} = -1$$

EJERCICIOS

1.- En los siguientes ejercicios, obtenga las derivadas parciales indicadas al usar la regla de la cadena.

a) $u = (yz)^x$, $x = e^{s+t}$, $y = s^2 + 3st$, $z = sent, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$

b) $z = \ln(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^t \cos t$, $y = e^t\, sen\, t, \frac{dz}{dt}$

$$R. \frac{dz}{dt} = 2 + e^t$$

c) $z = xe^{xy}$, $x = t - 3$, $y = e^{t-3}$, $\frac{dz}{dt}$

d) $u = 2x^2 - yz + xz^2$, $x = 2\, sen\, t$, $y = t^2 - t + 1$, $z = 3e^{-t}$,

$\frac{du}{dt}$ en $t = 0$ $\qquad$ $R.\ 24$

e) $u = arcsen\,(3x + y)$, $x = r^2 e^x$, $y = sen(rs)$; $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}$

f) $u = \cosh\left(\frac{y}{x}\right)$, $x = 2r^2 s$, $y = 6se^r$; $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}$

g) $u = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$, $x = r + 3s - t$, $y = r - 2s + 3t$; $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$

h) $u = xe^{-y}$, $x = \arctan(rst)$, $y = \cos(3rs + 5st)$; $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial t}$

2.- En los siguientes ejercicios, suponga que w es una función de todas las otras variables. Halle las derivadas parciales indicadas en cada caso.

a) $3x^2 + 2y^2 + 6w^2 - x + y = 12$, $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

b) $x^2 - 2xy + 2xw + 3y^2 + w^3 = 21$, $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

c) $x^2y - x^2w - 2xy^2 - yw^2 + w^3 = 7$, $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$

3.- Suponga que $f(x; y) = e^{xy}$ y que g, h son funciones tales que $g(2) = 3$, $g'(2) = 4, h(2) = 5, h'(2) = 6$; Halle $F'(2)$ si: $F(t) = f(g(t); h(t))$

$R.\ 38e^{15}$

4.- Si $f(r;s)$ es diferenciable en (0;0) y $D_1f(0;0) = 2, D_2f(0;0) = 3$ y $\phi(u;v)$ es diferenciable en $(0;0), \phi(0;0) = 0, \phi_u(0;0) = 7, \phi_v(0;0) = 9$.
Sea $g(u;v) = f(\phi(u;v);u)$. Calcule $g_u(0;0)$ y $g_v(0;0)$

R. $g_u(0;0) = 17,\ \ g_v(0;0) = 18$

5.- Dado $u = f(xu;y)$ demuestre que: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{uD_1f(xu;y)}{1 - xD_1f(xu;y)}$

6.- Si $z = \phi(y + ax) + \psi(y - ax)$, demuestre $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$

7.- Si $z = f(x;y),\ \ x = r\cos\theta\,, y = r\,sen\,\theta$, demuestre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

8.- Si $u = e^{x-at}\cos(x - at)$, pruebe que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

9.- Dado $z = u(x;y)e^{ax+by}$, donde $u(x;y)$ es una función de x e y tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$, ($a, b$ constantes). Halle los valores de a y b que hacen que la expresión $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} + z = 0$ $\quad R.\ a = b = 1$

10.- Si $w = f(x^2 - y^2; y^2 - x^2)$, pruebe que $y\dfrac{\partial w}{\partial x} + x\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$

11.- Una función u es definida por una ecuación de la forma $u = xyf\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$

Pruebe que u satisface la ecuación $x^2\dfrac{\partial u}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial u}{\partial y} = G(x;y)u$ y halle $G(x;y)$.

R. $G(x;y) = x - y$

12.- Una cierta función $F(x;y)$ es tal que $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = 2, \forall(x;y)$

El cambio de variable $x = uv,\ \ y = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2)$ transforma la función

$F(x;y)$ en una función de u y v. Determine los valores de las constantes a y b tales que $a\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2$ $\quad R.\ a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$

13.- Un lado de un rectángulo de $x = 20$ m, aumenta con una velocidad de 5 m/seg, el otro lado de $y = 30$ m, disminuye con una velocidad de 4 m/seg. ¿Con qué velocidad variará el perímetro y el área de dicho rectángulo?

R. Perímetro 2 m/seg, área 70 $m^2/\ seg$

14.- El radio de una esfera disminuye a razón de 2 cm/seg y el radio de la base de un cono recto, inscrito en dicha esfera, aumenta a razón de 1 cm/seg. Calcule la rapidez con que varía el volumen del cono cuando el radio de la esfera es de 10 cm y radio de la base del cono 6 cm. $\quad R.\ \frac{dV}{dt} = 9\pi$

15.- Una cantidad de gas obedece a la ley de un gas ideal $PV = 12T$, y el gas está en un recipiente que es calentado a una rapidez de 3° por seg. Si en el instante cuando la temperatura es 300°, la presión es $6\ lib\ /pulg^2$ y está disminuyendo a la rapidez de 0,1 $lib\ /pulg^2$ por segundo, halle la rapidez de cambio del volumen en ese instante. R. Crece a razón de $16\ pulg^3\ /seg$
Nota: P es la presión, V el volumen, T la temperatura.

16.- En un instante t, medido en minutos, una chinche sobre el plano XY está en el punto $(x;y)$, donde las distancias se miden en pies. La temperatura en $(x;y)$ es $z = T(x;y) = e^{-x-2y}$ grados. Cuando la chinche está en el punto (0;0) se mueve hacia el este a una velocidad de 2 pies/min. y hacia el norte a 3 pies/min. Desde el punto de vista de la chinche, ¿con qué rapidez está cambiando la temperatura del suelo? $\quad$ R. $-8\ °C/\text{min}$.

17.- Un depósito en forma de un cono invertido, tiene una altura de 10 m y una base de 10 m de diámetro. Si el depósito está llenándose de agua a razón de $2\ m^3/\ seg$, ¿a qué velocidad se está elevando el nivel de agua cuando el nivel se encuentra a 3 m de la parte superior del depósito?

$R.\ \frac{8}{49\pi}\ m\ /seg$

18.- Uno de los lados de un paralelogramo está aumentando a razón de 10 cm/seg. y uno de los adyacentes está disminuyendo a razón de 5 cm/seg, mientras que el ángulo comprendido está aumentando a razón de $2°/\ seg$. Determine cómo

y con qué rapidez está variando el área del paralelogramo en el momento en que tales lados miden 2,40 m y 1,50 m respectivamente, si el ángulo comprendido es 60°.

19.- Una piscina tiene 30 pies de ancho, 40 pies de largo, 3 pies de profundidad en un extremo y 8 pies en el otro extremo, siendo el fondo un plano inclinado. Si la piscina está llenándose con un caudal de 40 $pies^3\ /seg$, ¿a qué velocidad se está elevando el nivel de agua cuando dicho nivel es de 8 pies en el extremo más profundo? R. 1/30 pies/seg

20.- El auto A se desplaza hacia el norte por una carretera y el auto B viaja hacia el oeste por otra carretera, cada uno se aproxima al cruce de estas carreteras. En cierto momento, el auto A está a 1,5 km del cruce y viaja a 90 km/h, mientras que el auto B está a 2,5 km del cruce y viaja a 60 km/h ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre los autos en ese momento?

21.- El radio de un cilindro circular se incrementa a razón de 6 centímetros por minuto, y la altura decrece a razón de 4 centímetros por minuto. ¿Cuál es la velocidad con la que cambian el volumen y el área cuando el radio mide 12 cm y la altura 36 cm?

$$R.\ \frac{dV}{dt} = 4608\pi\ cm^3/\min\ ;\ \frac{dS}{dt} = 624\pi\ cm^2/\ min$$

22.- En un triángulo ABC considere los lados AB y AC y el ángulo θ que ellos forman. Suponga que el lado AB aumenta a 1/16 cm/min, el lado AC disminuye a 1/16 cm/min y que el ángulo θ aumenta a 0,02 rad/min. Determine la velocidad con la que varia el área del triángulo cuando AB mide 3 cm, AC mide 4 cm y el ángulo θ mide $\pi\ /4\ rad$.

$$R.\ \frac{dS}{dt} = \frac{121}{1600}\sqrt{2}\ cm^2/\ min$$

23.- El trigo que cae del orificio del fondo de un gran depósito va formando, sobre el terreno, un montón en forma de un cono circular recto. La altura del cono mide 5 metros y aumenta a razón de 50 cm en cada minuto. El radio de la base mide 3 metros y aumenta a razón de 50 cm cada minuto. Halle la variación del volumen que se experimenta en la unidad de tiempo.

$$R.\ \frac{13\pi}{2}\ m^3/\ min$$

24.- La utilidad "U" de una empresa que fabrica y vende un único producto depende del precio de venta "p" (en doláres) de dicho producto y del gasto en publicidad "g" (en doláres) para promocionar el producto.

La ecuación que relaciona las variables anteriores es $U = \frac{p^2}{2} - \frac{pg}{100} + \frac{g^2}{1000}$

Por otro lado "p" y "g" dependen del número "x" de unidades producidas mediante las reglas de correspondencia $p = h(x)$ y $g = H(x)$. Adicionalmente, se sabe que $h'(1000) = 1$; $h(1000) = 40$; $H'(1000) = 2$ y $H(1000) = 5000$.

Calcule e interprete $\frac{dU}{dx}$ evaluado en $x = 1000$.

R. La utilidad de la empresa aumenta a una razón de \$ 9,2 por unidad producida.

25.- La altura de un triángulo disminuye a razón de 2cm/seg, mientras que el área del mismo disminuye a razón de 3 cm^2 $/seg$ ¿A qué velocidad cambia la base del triángulo cuando la altura mide 20 cm y el área 180 cm^2? R. 1,5 cm/seg

26.- Si la ecuación $f(x^2 - y^2 + z^2; y^2 - x^2 + z^2) = 0$ define a z implícitamente como función de x e y, halle $w = \frac{1}{x}.\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}.\frac{\partial z}{\partial y}$ $R.\ 0$

27.- Sea la función $z = f(x; y)$ dada por la ecuación

$$sen\ (x + z) + sen\ (x + y) = 1$$

¿Para qué valor de la constante a en el punto $(\pi; \pi/2; \pi)$ se verifica la ecuación $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)$? $R.\ a = 2\pi$

EJERCICIOS DE DISCUSIÓN

Verdadero o Falso

1.- Si $z = f(x; y)$ es una función con derivadas parciales continuas hasta el 2do. orden, y además $x = 1 + 2t$, $y = 3 - t$ entonces,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

2.- Considere que la función $z = f(x;y)$ y las funciones $D_1f(x;y)$, $D_2f(x;y)$, $D_{12}f(x;y)$ y $D_{21}f(x;y)$ son continuas en una región $D \subset \mathbb{R}^2$ y además satisface $D_{11}f(x;y) = D_{22}f(x;y)$

Si $x = r + s$, $y = r - s$, entonces $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial r} = -2$

3.- Si $f(x;y;z) = \displaystyle\int_{xz}^{yz} e^{t^2}\, dt$, entonces $\nabla f(4;2;0) = (0;0;-2)$

4.- Si $u = \phi(x^2 + y^2 + z^2)$, entonces $yz\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2xz\dfrac{\partial u}{\partial y} + xy\dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$

5.- El ángulo que forman en su intersección la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $y = x$ es igual a $\pi/3$.

6.- Si el plano dado por $3(x-1) + 5(y+1) + 7(z-2) = 0$ es tangente a la superficie $F(x;y;z) = 0$ en $(1;-1;2)$, entonces $D_1F(1;-1;2) = 3$, $D_2F(1;-1;2) = 5$ y $D_3F(1;-1;2) = 7$

R. VFVFFF

4 APLICACIONES DE DERIVADAS PARCIALES
MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

En muchos campos del conocimiento humano (estadística, biología, ingeniería industrial, etc.), con cierta frecuencia hay la necesidad de resolver problemas de optimización a través de los poderosos conceptos de máximos y mínimos del cálculo diferencial.

Para resolver los problemas a partir de la información dada por el conjunto de datos, en primer lugar, se busca un modelo matemático que se ajusta al comportamiento de los datos. Si el modelo matemático contiene varias variables, es necesario identificar en forma clara las condiciones del problema que aporten suficientes relaciones entre las variables.

Vamos a empezar el capítulo presentando la definición de máximos y mínimos relativos de una función de n variables. Luego, se establecerán criterios para determinar los puntos donde la función tiene un máximo o un mínimo relativo.

4.1 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D.

Definición 1.- Se dice que f presenta un máximo absoluto en el punto $P_0 \in D_f$, si $f(P) \leq f(P_0), \forall P \in D$, en tal caso $f(P_0)$ se denomina valor máximo absoluto de f.

Definición 2.- Se dice que f presenta un mínimo absoluto en el punto $Q_0 \in D_f$, si $f(Q_0) \leq f(Q), \forall Q \in D$, en tal caso $f(Q_0)$ se denomina valor mínimo absoluto de f.

Observación 1.-

a) Un punto $P \in D$ se llama punto extremo, si P corresponde a un máximo o mínimo. Así, $f(P)$ se denomina valor extremo de f.

b) Como en el caso de funciones de una variable real, no toda función tiene máximo o mínimo absoluto.

Ejemplo 1.- La función $z = f(x; y) = x^2 + (y - 1)^2$ definida en el conjunto $D = \mathbb{R}^2$ tiene un mínimo absoluto en $Q_0(0; 1)$ y no presenta máximo absoluto. (Fig. 4.1)

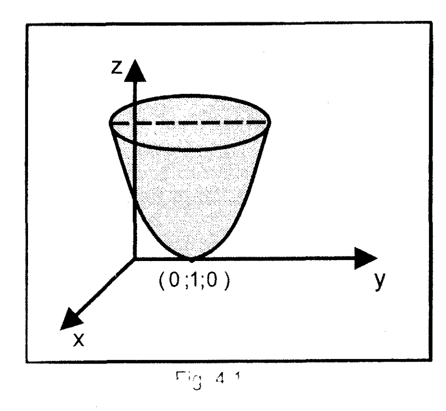


Fig. 4.1

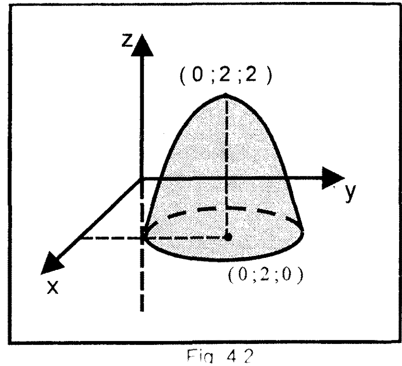


Fig. 4.2

Ejemplo 2.- La función $z = f(x;y) = 2 - x^2 - (y-2)^2$ alcanza su valor máximo en $P_0(0;2)$ y no tiene mínimo absoluto (Fig. 4.2)

Ejemplo 3.- La función $f(x;y) = \dfrac{x\sqrt{1-x^2-y^2}}{y}$, con dominio $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2+y^2 \leq 1 \wedge y > 0\}$ no tiene máximo ni mínimo, pues para $x \neq 0$ fijo se tiene $\lim\limits_{y \to 0^+} f(x;y) = \pm\infty$ según sea $x > 0$ ó $x < 0$ respectivamente.

Teorema 1.- Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado, y sea $f: D \subset \mathbb{R}$ una función continua en D. Entonces, existe al menos un punto en D donde f tiene un valor máximo absoluto, y al menos un punto en D donde f tiene un valor mínimo absoluto.

Ejemplo 4.- La función

$$f(x;y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - y^2}$$

es continua en el conjunto cerrado y acotado

$$D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$$

El valor máximo absoluto de f ocurre en el punto (0;0), y su valor mínimo absoluto ocurre en todo punto de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (Fig.4.3)

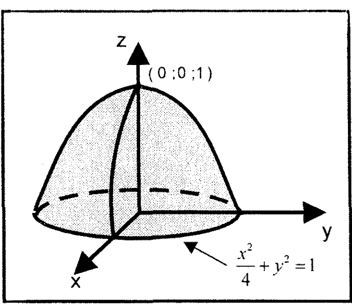


Fig. 4.3

Definición 3.- Se dice que una función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto D presenta un máximo relativo o local en el punto $P_0 \in D$, si existe una bola abierta $B(P_0; \varepsilon) f: \subset D, (\varepsilon > 0)$, tal que

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in B(P_0; \varepsilon)$$

en tal caso $f(P_0)$ se llama valor máximo relativo o local de f.

Definición 4.- Se dice que una función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto D presenta un mínimo relativo o local en el punto $Q_0 \in D$, si existe una bola abierta $B(Q_0; \delta), (\delta > 0)$, tal que

$$f(Q_0) \leq f(Q), \forall Q \in B(Q_0; \delta)$$

en tal caso $f(Q_0)$ se llama valor mínimo relativo o local de f.

Observación 2.- Un punto $P_0 \in D$ es un punto de extremo relativo o local, si P_0 corresponde a un máximo o mínimo relativo de la función f.

Teorema 2.- Si la función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto D presenta un extremo relativo en $P_0 \in D$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(P_0), (k = 1,2, \ldots, n)$ existen, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(P_0) = 0, \forall k = 1,2,3, \ldots, n$.

Demostración.- Supongamos que f presenta un máximo relativo en $P_0 \in D$, entonces existe una bola abierta $B(P_0; \delta) \subset D$ tal que

$$f(P) \leq f(P_0), \quad \forall P \in B(P_0; \delta)$$

Luego, para $h > 0$ y $P_0 + h\vec{u}_k \in B(P_0; \delta)$, donde $\vec{u}_k = (0; \ldots; 1; 0: \ldots 0)$, se tiene

$$f(P_0 + h\vec{u}_k) \leq f(P_0) \text{ y esto implica que: } \frac{f(P_0 + h\vec{u}_k) - f(P_0)}{h} \leq 0$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{f(P_0 + h\vec{u}_k) - f(P_0)}{h} \leq 0$.

En forma similar, si $h < 0$, resulta $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{f(P_0 + h\vec{u}_k) - f(P_0)}{h} \geq 0$

Como $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x_k}$ existe, entonces se tiene

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_k} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(P_0 + h\vec{u}_k) - f(P_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(P_0 + h\vec{u}_k) - f(P_0)}{h} = 0\,,$$

$$\forall k = 1,2,\ldots,n$$

Así, los valores extremos de una función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas en el conjunto abierto D pueden ocurrir en puntos donde las primeras derivadas parciales de f son ceros.

Definición 5.- (Punto crítico) Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D.

Se dice que un punto $P_0 \in D$ (punto interior de D) es un punto crítico de la gráfica de f si:

i) Existen $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i}, i = 1,2,\ldots,n$ y $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1,2,\ldots,n$ o bien

ii) $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i}$, $\quad i = 1,2,\ldots,$ no existen.

Ejemplo 5.- Sea la función

$f(x;y) = xy(3 - x - y)$ definida en el conjunto

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x > 0, y > 0; x + y < 3\}$

(Fig. 4.4)

Esta función tiene un único punto crítico en D, obtenido al resolver las ecuaciones

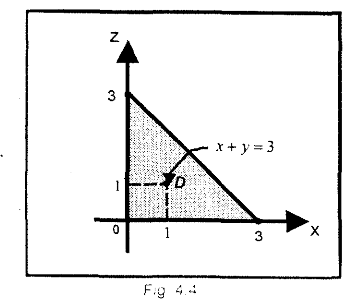
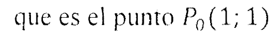


Fig 4.4

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2 = 0$$

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = 3y - 2xy - y^2 = 0$$


que es el punto $P_0(1;1)$

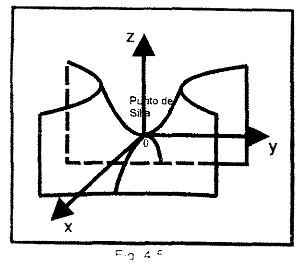
Observación 3.- El teorema anterior afirma que una condición necesaria para que una función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tenga un extremo relativo en un punto $P_0 \in D$, donde sus primeras derivadas parciales existen, es que ese punto sea un punto crítico. Pero este teorema no es suficiente para estudiar el problema de la existencia de los valores extremos de la función.

Observación 4.- Un punto crítico de la gráfica de la función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que no corresponde a un valor máximo o valor mínimo relativo, se denomina punto de silla o ensilladura.

Ejemplo 6.- La función $z = f(x; y) = y^2 - x^2$ (paraboloide hiperbólico) tiene derivadas parciales $\dfrac{\partial y}{\partial x} = -2x, \quad \dfrac{\partial y}{\partial x} = 2y$

que se anulan en $x = y = 0$

Sin embargo, la función no tiene máximo ni mínimo en este punto $(0; 0)$. En efecto, esta función es cero en el origen, mientras que en la vecindad inmediata de este punto toma valores positivos como negativos, es decir, $(0; 0)$es un punto crítico tipo silla (Fig. 4.5).



MATRIZ HESSIANA DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

Definición 6.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables con dominio el conjunto abierto D tal que $f_{x_i}(\text{P})$ y $f_{x_i x_j}(\text{P})$ existen $\forall i, j = 1,2, \ldots, n$ y $\forall P \in D$

Se denomina matriz hessiana de la función f en el punto $P \in D$, a la matriz dada por

$$H\big(f(P)\big) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\text{P}) & f_{x_1x_2}(\text{P}) \ldots\ldots & f_{x_1x_n}(\text{P}) \\ f_{x_2x_1}(\text{P}) & f_{x_2x_2}(\text{P}) \ldots\ldots & f_{x_2x_n}(\text{P}) \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(P) & f_{x_nx_2}(P) \ldots\ldots & f_{x_nx_n}(P) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Ejemplo 7.- Halle la matriz hessiana de las siguientes funciones:

a) $f(x; y) = x^3 + y^3 - 9xy + 4$ b) $g(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z$

Solución

a) Las derivadas parciales de primer orden y de segundo orden de f son

$$\begin{cases} f_x(x; y) = 3x^2 - 9y\,, \; f_{xx}(x; y) = 6x\,, \; f_{xy}(x; y) = -9 \\ f_y(x; y) = 3y^2 - 9x\,, \; f_{yx}(x; y) = -9\,, \; f_{yy}(x; y) = 6y \end{cases}$$

Luego, la matriz hessiana de f es

$$H\big(f(x; y)\big) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x; y) & f_{xy}(x; y) \\ f_{yx}(x; y) & f_{yy}(x; y) \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

b) Las derivadas parciales de primer orden y de segundo orden de g son:

$$\begin{cases} g_x(x;y;z) = 2x - y, & g_{xx}(x;y;z) = 2, \quad g_{xy}(x;y;z) = -1, \quad g_{xz}(x;y;z) = 0 \\ g_y(x;y;z) = 2y - x, & g_{yx}(x;y;z) = -1, \quad g_{yy}(x;y;z) = 2, \quad g_{yz}(x;y;z) = 0 \\ g_z(x;y;z) = 2z + 2, & g_{zx}(x;y;z) = 0, \quad g_{zy}(x;y;z) = 0, \quad g_{zz}(x;y;z) = 2 \end{cases}$$

Luego, la matriz hessiana de g es

$$g(x;y;z) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Observación 5.- Los menores principales de la matriz hessiana $H(f(P))$ dada en la definición 6 son los determinantes dados por

$$H_1(f(P)) = f_{x_1x_1}(P)$$

$$H_2(f(P)) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P) & f_{x_1x_2}(P) \\ f_{x_2x_1}(P) & f_{x_2x_2}(P) \end{vmatrix}$$

$$H_3(f(P)) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P) & f_{x_1x_2}(P) & f_{x_1x_3}(P) \\ f_{x_2x_1}(P) & f_{x_2x_2}(P) & f_{x_2x_3}(P) \\ f_{x_3x_1}(P) & f_{x_3x_2}(P) & f_{x_3x_3}(P) \end{vmatrix} \ldots..$$

$$\begin{matrix} . & & . \\ . & & . \\ . & & . \end{matrix}$$

$$H_n(f(P)) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(P) & f_{x_1x_2}(P) & \cdots & f_{x_1x_n}(P) \\ f_{x_2x_1}(P) & f_{x_2x_2}(P) & \cdots & f_{x_2x_n}(P) \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ f_{x_nx_1}(P) & f_{x_nx_2}(P) & \cdots & f_{x_nx_n}(P) \end{vmatrix}$$

CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES PARA CALCULAR LOS EXTREMOS RELATIVOS

Teorema 3.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables con dominio el conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, tal que $f_{x_i}(P)$ y $f_{x_i x_j}(P)$ existen $\forall i, j = 1,2, \dots, n$ y $\forall P \in D$. Sea $P_0 \in D$ un punto crítico de la gráfica de f, entonces se tiene:

a) Si la matriz hessiana $H(f(P_0))$ es definida positiva, esto es, $H_1(f(P_0)) > 0$, $H_2(f(P_0)) > 0, \dots, H_n(f(P_0)) > 0$, entonces $f(P_0)$ es un valor mínimo relativo de f.

b) Si la matriz hessiana $H(f(P_0))$ es definida negativa, esto es, $H_1(f(P_0)) < 0$, $H_2(f(P_0)) > 0$, $H_3(f(P_0)) < 0$, $H_4(f(P_0)) > 0$, ..., y así sucesivamente (es decir, los menores principales de orden impar son negativas y los de orden par positivos), entonces $f(P_0)$ es un valor máximo relativo de f.

c) Si no se cumple ninguna de las dos primeras condiciones y $H_n(f(P_0)) \neq 0$, entonces el punto crítico P_0 corresponde a un punto de silla de la gráfica de f.

d) Si no se cumple ninguna de las dos primeras condiciones y $H_n(f(P_0)) = 0$, entonces nada se puede concluir con respecto al punto crítico P_0; puede corresponder a un extremo relativo, a un punto de silla o ninguna de estas características.

Ejemplo 8.- Halle los extremos relativos de

$$f(x; y) = x^4 + y^4$$

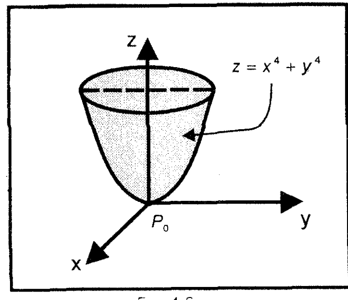


Fig. 4.6

Solución

Las derivadas parciales de primer orden de f son

$f_x(x; y) = 4x^3$ y $f_y(x; y) = 4y^3$

Luego, $f_x(x; y) = 0$ y $f_y(x; y) = 0$ si $x = 0$ y $y = 0$

Así, $P_0(0; 0)$ es un punto crítico de la gráfica de f.

Ahora, la matriz hessiana de f es

$$H(f(x; y)) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x; y) & f_{xy}(x; y) \\ f_{yx}(x; y) & f_{yy}(x; y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Como los menores principales de la matriz hessiana en el punto $P_0(0; 0)$ son

$H_1(f(0;0)) = 0$ y $H_2(f(0;0)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

entonces no se puede concluir nada con respecto al punto crítico $P_0(0;0)$.
Sin embargo, la gráfica de la función f (Fig. 4.6) indica que $P_0(0;0)$ corresponde a un mínimo relativo de f y $f(0;0) = 0$ es el valor mínimo relativo.

Ejemplo 9.- Determine los extremos relativos de

$$f(x;y) = x^3 + y^3 + 9x^2 - 3y^2 + 15x - 9y + 20$$

Solución

Las derivadas parciales de primer orden de f son

$$f_x(x;y) = 3x^2 + 18x + 15 = 3(x+1)(x+5)$$

$$f_y(x;y) = 3y^2 - 6y - 9 = 3(y+1)(y-3)$$

Al igualar a cero estas derivadas parciales, se obtiene los puntos críticos

$$P_1(-1;-1), P_2(-1;3), P_3(-5;-1) \text{ y } P_4(-5;3)$$

La matriz hessiana de f en un punto genérico $(x;y)$ es

$$H(f(x;y)) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x;y) & f_{xy}(x;y) \\ f_{yx}(x;y) & f_{yy}(x;y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x+18 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{bmatrix}$$

Para el punto $P_1(-1;-1)$, se tiene

$$H(f(-1;-1)) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(-1;-1)) = 12 > 0$ y $H_2(f(-1;-1)) = -144 < 0$, entonces P_0 corresponde a un punto de silla. El punto de silla de la gráfica de f es

$$Q(-1;-1;f(-1,-1)) = Q(-1;-1;18)$$

Para el punto $P_2(-1;3)$, se obtiene

$$H(f(-1;3)) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(-1;3)) = 12 > 0$ y $H_2(f(-1;3)) = 144 > 0$, entonces P_2 corresponde a un mínimo relativo. El valor mínimo relativo es $f(-1;3) = -14$

Para el punto $P_3(-5;-1)$, resulta

$$H(f(-5;-1)) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(-5;-1)) = -12 < 0$ y $H_2(f(-5;-1) = 144 > 0$, entonces P_3 corresponde a un máximo relativo.

El valor máximo relativo de f es $f(-5;-1) = 50$

Para el punto $P_4(-5;3)$, se tiene

$$H(f(-5;3)) = \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(-5;3)) = -12 < 0$ y $H_2(f(-5;3)) = -144 < 0$, entonces P_4 corresponde a un punto de silla. El punto de silla de la gráfica de f es

$$Q(-5;3;f(-5;3)) = Q(-5;3;18)$$

Ejemplo 10.- Halle los extremos relativos de

$$f(x;y;z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xy - 3z^2 + 2$$

Solución

Las derivadas parciales de primer orden de f son

$$f_x(x;y;z) = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y)$$
$$f_y(x;y;z) = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x)$$
$$f_z(x;y;z) = 3z^2 - 6z = 3z(z - 2)$$

Al igualar a cero estas derivadas parciales y resolver, se obtiene los puntos críticos $P_1(0;0;0)$, $P_2(0;0;2)$, $P_3(1;1;0)$ y $P_4(1;1;2)$

La matriz hessiana de f en un punto genérico $(x;y;z)$ es

$$H(f(x;y;z)) = \begin{bmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 6z-6 \end{bmatrix}$$

Para el punto $P_1(0;0;0)$, la matriz hessiana de f es

$$H(f(0;0;0)) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(0;0;0)) = 0$, $H_2(f(0;0;0)) = -9$ y $H_3(f(0;0;0)) = 54$; entonces P_1 corresponde a un punto de silla.

Para el punto $P_2(0;0;2)$, se tiene

$$H(f(0;0;2)) = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(0;0;0)) = 0$, $H_2(f(0;0;0)) = -9$ y $H_3(f(0;0;0)) = -54$; entonces P_2 corresponde a un punto de silla.

Para el punto $P_3(1;1;0)$, se obtiene

$$H(f(1;1;0)) = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(1;1;0)) = 6 > 0$, $H_2(f(1;1;0)) = 27 > 0$ y $H_3(f(P_3)) = -162 < 0$, entonces P_3 corresponde a un punto de silla.

Para el punto $P_4(1;1;2)$, se obtiene

$$H(f(1;1;2)) = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(1;1;2)) = 6 > 0$, $H_2(f(1;1;2)) = 27 > 0$ y $H_3(f(P_4)) = 162 > 0$, entonces P_4 corresponde a un mínimo relativo. El valor mínimo relativo de f es $f(1;1;2) = -3$.

Ejemplo 11.- Halle los extremos relativos de la función

$$f(x;y;z) = \frac{e^{x+y+z}}{(1+e^x)(e^x+e^y)(e^y+e^z)(1+e^z)}$$

Solución

Al aplicar la regla del producto, las derivadas parciales de primer orden de f son

$$f_x(x;y;z) = f(x;y;z) - \frac{e^x}{1+e^x}f(x;y;z) - \frac{e^x}{e^x+e^y}f(x;y;z) \quad ...(1)$$

$$f_y(x;y;z) = f(x;y;z) - \frac{e^y}{e^x+e^y}f(x;y;z) - \frac{e^y}{e^y+e^z}f(x;y;z) \quad ...(2)$$

$$f_z(x;y;z) = f(x;y;z) - \frac{e^z}{e^y+e^z}f(x;y;z) - \frac{e^z}{1+e^z}f(x;y;z) \quad ...(3)$$

Como $f(x;y;z) \neq 0, \forall(x;y;z) \in D_f$, entonces al igualar a cero y resolver las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtienen respectivamente,

$$y = 2x\,,\ 2y = x+z \text{ y } y = 2z$$

Luego, al resolver estas ecuaciones se obtiene el único punto crítico $P_1(0;0;0)$

Para el punto $P_2(0;0;0)$ la matriz hessiana de f es

$$H(f(0;0;0)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{32} & \frac{1}{64} & 0 \\ \frac{1}{64} & -\frac{1}{32} & \frac{1}{64} \\ 0 & \frac{1}{64} & -\frac{1}{32} \end{bmatrix}$$

y como $H_1(f(0;0;0)) = -\frac{1}{32} < 0$, $H_2(f(0;0;0)) = \frac{3}{4096} > 0$ y

$H_3(f(0;0;0)) = -\frac{4}{64^3} < 0$, entonces P_1 corresponde a un máximo relativo.

Por tanto, el valor máximo relativo de f es $f(0;0;0) = \frac{1}{16}$.

Ejemplo 12.- Una caja rectangular cerrada con un volumen de $16\,m^3$ se construye con dos clases de material. La parte superior e inferior se hace con un material que cuesta 10 doláres el metro cuadrado; los lados, con un material que cuesta 5 dólares el metro cuadrado. Calcule las dimensiones de la caja para que el costo sea mínimo.

Solución

Sean x, y y z las dimensiones de la caja rectangular (Fig. 4.7).

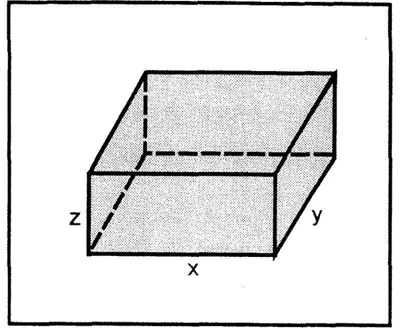


Fig. 4.7

Como hay dos lados de área xy, dos lados de área yz y dos lados de área xz; el costo C del material para construir la caja es

$$\begin{aligned} C &= 10(2xy) + 5(2yz) + 5(2xz) \\ &= 20xy + 10yz + 10xz \end{aligned}$$

Dado que el volumen de la caja debe ser de $16\,m^3$, se tiene

$$V = xyz = 16 \Rightarrow z = \frac{16}{xy}$$

Luego, al reemplazar la expresión de z en la del costo se obtiene

$$C(x;y) = 20xy + \frac{160}{x} + \frac{160}{y}\ , x > 0\ , y > 0$$

Las derivadas parciales de primer orden de la función costo son

$$C_x(x;y) = 20y - \frac{160}{x^2} \quad \text{y} \quad C_y(x;y) = 20x - \frac{160}{y^2}$$

Al igualar a cero estas derivadas parciales, se obtiene

$$\begin{cases} x^2y = 8 \\ xy^2 = 8 \end{cases}$$

Al resolver estas ecuaciones, se obtiene el punto crítico $P_1(2;2)$

La matriz hessiana del costo C en un punto genérico $(x;y)$ es

$$H\big(C(x;y)\big) = \begin{bmatrix} \dfrac{320}{x^3} & 20 \\ 20 & \dfrac{320}{y^3} \end{bmatrix}$$

Para el punto crítico $P_1(2;2)$, resulta

$$H\big(C(2;2)\big) = \begin{bmatrix} 40 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$$

y como $H_1\big(C(2;2)\big) = 40 > 0$ y $H_2\big(C(2;2)\big) = 1200 > 0$, entonces P_1 corresponde a un mínimo de C.

Por tanto, las dimensiones de la caja de costo mínimo son: base $x = 2\,m$, $y = 2\,m$ y altura $z = 4\,m$. El costo mínimo es $C(2;2) = \$\,240$

Ejemplo 13.- Un fabricante que posee derechos exclusivos sobre una nueva y completa maquinaria industrial planea vender una cantidad limitada de las máquinas tanto a empresas nacionales como extranjeras. El precio que el fabricante espera fijar a las máquinas dependerá del número de máquinas disponibles. (Por ejemplo, si sólo unas cuantas máquinas se ponen en el mercado, las ofertas de los compradores potenciales que compiten entre sí tenderán a subir el precio). Se calcula que si el fabricante suministra x máquinas al mercado nacional e y máquinas al mercado extranjero, éstas se venderán a $60 - \frac{x}{10} + \frac{y}{20}$ miles de dólares cada una en el mercado local y a $70 - \frac{y}{5} + \frac{x}{20}$ miles de dólares en el exterior. Si el fabricante puede producir las máquinas a un costo de US\$ 20000 cada una, ¿cuántas máquinas debería enviar a cada mercado para generar la mayor utilidad posible?

Solución

La función de utilidad (a maximizar) es dada por

$$\begin{aligned} U(x;y) &= I(x;y) - C(x;y) \\ &= x\left(60 - \frac{x}{10} + \frac{y}{20}\right) + y\left(70 - \frac{y}{5} + \frac{x}{20}\right) - 20x - 20y \\ &= 40x + 50y - \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{5} + \frac{xy}{10}, \quad x > 0, \; y > 0 \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de primer orden de la función utilidad son

$$U_x(x;y) = 40 - \frac{x}{5} + \frac{y}{10} = \frac{1}{10}[400 - 2x + y]$$

$$U_y(x;y) = 50 - \frac{2y}{5} + \frac{x}{10} = \frac{1}{10}[500 - 4y + x]$$

Al igualar a cero estas derivadas parciales y resolver las ecuaciones correspondientes, se obtiene el único punto crítico $P_1(300;200)$.

La matriz hessiana de la función utilidad en un punto genérico $(x;y)$ es

$$H\big(U(x;y)\big) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow H\big(U(300;200)\big) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Como $H_1\big(U(300;200)\big) = -\frac{1}{5} < 0$ y $H_2\big(U(300;200)\big) = \frac{7}{100} > 0$, entonces

$P_1(300; 200)$ corresponde a un máximo relativo.
Por tanto, debe enviar 300 máquinas al mercado nacional y 200 máquinas al mercado extranjero para generar la máxima utilidad.

Ejemplo 14.- La empresa Sajita S.A. produce un solo producto en dos plantas ubicadas en Arequipa y Trujillo. Los costos mensuales totales de producción en cada planta son

$$C_A(x) = 50x^2 + 1000 \ \text{ y } \ C_T(y) = 8y^3 - 400y + 2000$$

donde x e y son las cantidades producidas en cada planta. El precio del mercado para el producto es de 2000 soles la unidad. ¿Cuántas unidades debería producir mensualmente la empresa en cada planta para generar la mayor utilidad posible?.

Solución

La función utilidad (a maximizar) viene dada por

$$\begin{aligned} U(x; y) &= I(x; y) - C(x; y) \\ &= 2000x + 2000y - [50x^2 + 1000 + 8y^3 - 400y + 2000] \\ &= 2000x + 2400y - 50x^2 - 8y^3 - 3000\,, \quad x > 0, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de la función utilidad son
$U_x(x; y) = 2000 - 100x$ y $U_y(x; y) = 2400 - 24y^2$
Al igualar a cero estas derivadas parciales y resolver, se obtiene el único punto crítico $P_1(20; 10)$.
La matriz hessiana de la función U en el punto genérico $(x; y)$ es

$$H\big(U(x; y)\big) = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -48y \end{bmatrix} \Rightarrow H\big(U(20; 10)\big) = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -480 \end{bmatrix}$$

Como $H_1\big(U(20; 10)\big) = -100 < 0$ y $H_2\big(U(20; 10)\big) = 48000 > 0$, entonces P_1 corresponde a un máximo local.
Por consiguiente, la empresa debe producir 20 unidades en su planta de Arequipa y 10 unidades en su planta de Trujillo para maximizar su utilidad mensual.

Ejemplo 15.- Supóngase que x e y representan las cantidades (en kilos) de los complementos diferentes mezclados en un alimento balanceado para pollos. Los pesos resultantes (en kilos) para vender los gallos y las gallinas se estiman por
$p = 6x - 3y$ y $q = 3y - 9$ respectivamente.
La utilidad (en miles de nuevos soles) obtenido de un lote de pollos se modela por la función $U(p; q) = 10 - 2(p - 15)^2 - (q - 12)^2$ (se supone que el número de gallos y gallinas en cada lote no varía).
Determine las cantidades x e y de cada complemento alimentario que maximiza la utilidad.

Solución

Al aplicar la regla de la cadena, las derivadas parciales de la función utilidad con respecto a x e y son

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial x}=-24[(6x-3y)-15]$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial p}.\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial q}.\frac{\partial q}{\partial y}=12[(6x-3y)-15]-6[(3y-9)-12]$$

Al igualar a cero estas derivadas parciales y resolver, se obtiene el único punto crítico $P_1(6;7)$, esto es, $x=6$ y $y=7$.

La matriz hessiana de la función utilidad en un punto genérico $(x;y)$ es

$$H\big(U(x;y)\big)=\begin{bmatrix}-144 & 72\\ 72 & -54\end{bmatrix}\Rightarrow H\big(U(6;7)\big)=\begin{bmatrix}-144 & 72\\ 72 & -54\end{bmatrix}$$

Como $H_1\big(U(6;7)\big)=-144<0$ y $H_2\big(U(6;7)\big)=2592>0$, entonces $P_1(6;7)$ corresponde a un máximo relativo.

Por consiguiente, las cantidades de $x=6$ kilos e $y=7$ kilos maximizan la utilidad.

Ejemplo 16.- Una caja rectangular descansa sobre el plano XY con un vértice en el origen coordenado. Halle el volumen máximo de la caja si el vértice opuesto está situado en el plano $Q\colon 2x+2y+z=12$.

Solución

Sean a, b y c las longitudes de las aristas de la caja, tal que $P(a;b;c)$ es el vértice (opuesto al origen) de la caja situado en el plano Q (Fig. 4.8).

Como $P(a;b;c)$ está sobre el plano Q, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación del plano, esto es

$$Q\colon 2a+2b+c=12$$
$$\Leftrightarrow c=12-2a-2b$$

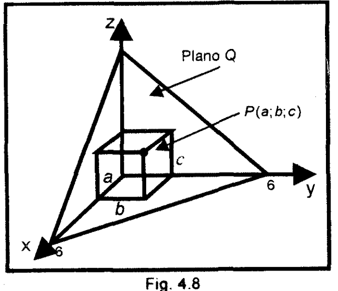


Fig. 4.8

Luego, el volumen de la caja en función de a y b es

$$V=abc=ab(12-2a-2b)$$
$$=12ab-2a^2b-2ab^2$$

Las derivadas parciales de primer orden de la función volumen son

$$V_a(a;b)=12b-4ab-2b^2=b(12-4a-2b)$$

$$V_b(a;b) = 12a - 2a^2 - 4ab = a(12 - 2a - 4b)$$

Al resolver estas ecuaciones, se obtiene el único punto crítico de interés $P_1(2;2)$.
Para verificar si el punto crítico corresponde a un máximo relativo, determinamos la matriz hessiana de la función volumen, esto es,

$$H(V(a;b)) = \begin{bmatrix} -4b & 12 - 4a - 4b \\ 12 - 4a - 4b & -4a \end{bmatrix} \Rightarrow H(V(2;2)) = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}$$

Como $H_1(V(2;2)) = -8 < 0$ y $H_2(V(2;2)) = 48 > 0$, entonces $P_1(2;2)$ corresponde a un máximo relativo.
Por tanto, el volumen máximo de la caja es

$$V = (2)(2)(4) = 16\,u^3$$

VALORES MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

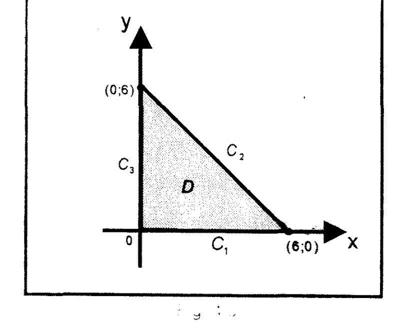
Recordemos que el teorema de existencia de extremos absolutos para una función de una variable real establece que si la función f es continua en el intervalo cerrado $[a;b]$, entonces existen puntos en $[a;b]$ en donde f tiene un valor máximo absoluto y un valor mínimo absoluto.
En forma similar, en el siguiente teorema consideramos la existencia de extremos absolutos para una función de varias variables, en un conjunto cerrado y acotado $D \subset D_f$.

Teorema 4.- (Existencia de extremos absolutos)
Si $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función continua en el conjunto cerrado y acotado D, entonces
i) Existe al menos un punto $P_0 \in D$, tal que f tiene un valor mínimo absoluto en P_0.
ii) Existe al menos un punto $Q_0 \in D$, tal que f tiene un valor máximo absoluto en Q_0.

Observación 6.- Un procedimiento general para determinar los valores extremos absolutos de una función continua f en un conjunto cerrado y acotado $D \subset D_f$ es:
1.- Comprobar que la función sea continua en el conjunto cerrado D.
2.- Determinar los puntos críticos que pertenecen al conjunto D y calcular los valores de la función en esos puntos.
3.- Hallar los valores de la función en los puntos frontera del conjunto D.

4.- El mayor valor de los valores encontrados en los pasos (1) y (2) es el valor máximo absoluto de f; el menor valor de estos valores es el valor mínimo absoluto de f.

Ejemplo 17.- Halle los extremos absolutos de la función $f(x;y) = 4x^2y - x^3y - x^2y^2$ en el conjunto limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 6 = 0$



Solución

El conjunto D es la región del plano XY que consta de las fronteras del triángulo C_1, C_2 y C_3 y su inferior (Fig. 4.9).

i) En el interior y en las fronteras C_1 y C_3, los puntos críticos son soluciones del sistema de ecuaciones.

$$f_x(x;y) = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(8 - 3x - 2y) = 0$$

$$f_y(x;y) = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4 - x - 2y) = 0$$

Estos puntos son: $P_1(0;0), P_2(0;2), P_3(0;4), P_4(4;0)$ y $P_5(2;1)$

ii) En la frontera C_2 de ecuación $y = 6 - x$, se tiene

$h(x) = f(x; 6 - x) = 2x^3 - 12x^2$

Esto determina una función de una variable cuyo dominio es el intervalo $[0;6]$. La primera derivada de esta función es

$h'(x) = 6x^2 - 24x = 6x(x - 4)$.

Al igualar a cero esta derivada resulta $x = 0$ ó $x = 4$. Así, los puntos críticos de f en la frontera C_2 son:

$P_6(0;6)$ y $P_7(4;2)$

Luego, los puntos críticos en los cuales hay que analizar los extremos absolutos incluyendo el vértice $(6;0)$ del triángulo son:

$$P_1(0;0), P_2(0;2), P_3(0;4), P_4(4;0), P_5(2;1), P_6(0;6), P_7(4;2) \text{ y } P_8(6;0)$$

iii) Para determinar los extremos absolutos de la función f, evaluamos la función en cada punto para así hallar el punto en el cual f alcanza su mayor y menor valor. Los valores de la función son:

$$f(P_1) = 0, f(P_2) = 0, \ f(P_3) = 0, \ f(P_4) = 0, \ f(P_5) = 4, \ f(P_6) = 0,$$

$$f(P_7) = -64 \text{ y } f(P_8) = 0$$

Por tanto, el valor máximo absoluto de f es 4 y ocurre en el punto $P_5(2;1)$, y el valor mínimo absoluto de f es -64 y ocurre en el punto $P_7(4;2)$

Ejemplo 18.- Una placa circular plana tiene la forma de la región $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 9\}$. La placa, incluyendo la frontera $x^2 + y^2 = 9$ se calienta de manera que la temperatura en cualquier punto $(x;y)$ es

$$T(x;y) = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8$$

Determine los puntos más calientes y más fríos de la placa, así como la temperatura en cada una de ellas.

Solución

El dominio de la temperatura es ia región del plano XY que está formada por la frontera de la circunferencia C y su interior (Fig. 4.10)

Fig. 4.10

i) En el interior de la circunferencia, los puntos críticos son soluciones del sistema

$$T_x(x;y) = 2x - 4 = 0$$
$$T_y(x;y) = 2y - 4 = 0$$

Esto es, $P_1(2;2)$

ii) En la frontera de la circunferencia $C: x^2 + y^2 = 9$, que en forma paramétrica se escribe como: $C: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,sen\,t \end{cases}, t \in [0;2\pi]$, los valores de la función T es

$$g(t) = T(3\cos t; 3\,sen\,t) = 17 - 12\cos t - 12\,sen\,t\,, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

La primera derivada de esta función es

$$g'(t) = 12\,sen\,t - 12\cos t$$

Al igualar a cero esta derivada y resolverla, los puntos críticos de g comprendidos en el intervalo $\langle 0; 2\pi \rangle$ son

$$t = \frac{\pi}{4} \quad y \quad t = \frac{5\pi}{4}$$

Al incluir a estos puntos los extremos del intervalo $[0;2\pi]$, se tiene

$$t_1 = 0,\ t_2 = \frac{\pi}{4},\ t_3 = \frac{5\pi}{4} \quad y \quad t_4 = 2\pi$$

Así, los puntos sobre la circunferencia C que corresponden a estos puntos son respectivamente

$$P_2(3;0), P_3\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \ y \ P_5(3;0) = P_2(3;0)$$

iii) Los valores de la temperatura T en los puntos de la circunferencia C y el punto crítico interior P_1 son:

$$T(P_1) = 0, T(P_2) = 5 = T(P_5), T(P_3) = 17 - 12\sqrt{2} \ y \ T(P_4) = 17 + 12\sqrt{2}$$

Por consiguiente, el punto más caliente de la placa es $P\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ y el más frío el punto $P_1(2;2)$.

EJERCICIOS

1.- En los siguientes ejercicios, determine los extremos relativos de la función f.

a) $f(x;y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$

R. Máx, relativo en $(-2;1)$, mín. relativo en $(1;1)$. Punto silla en $(-2;1)$ y $(1;-1)$

b) $f(x;y) = -2x^2 + 3xy - 3y^2 + 5x - 5y + 4$

R. Máx. relativo en $(1;-1/3)$

c) $f(x;y) = x^3 - y^3 - 6xy - 4$

R. Máx. relativo en $(-2;2)$ y punto de silla en (0,0)

d) $f(x;y) = x^3 + 3x^2 + 6xy + y^2$

R. Mín. relativo en (4;-12) y punto de silla en (0;0)

e) $f(x;y;z) = 1 - 8z + 6xy - 2x^3 - 2y^3 + 2z^4$

R. No tiene extremos relativos. Punto de silla (0;0;1) y (1;1;1)

f) $f(x;y;z) = x^3 + y^2 + yz + z^2 - 3x - 5z + 3$

g) $f(x;y;z) = 4x + xy - yz - x^2 - y^2 - z^2$ R. Máx. en (3;2;-1)

h) $f(x;y;z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xz + xy$ R. Mín. en (0;0;0)

2.- Calcule y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones

a) $f(x;y) = sen\,(x+y) + sen\,x + sen\,y$

$$R.\ Máx.en\ \left(\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right), Mín.en\ \left(\frac{5\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right)$$

b) $f(x;y) = \frac{1}{xy} - \frac{4}{x^2y} - \frac{8}{xy^2}$ $R.$ $(12;24)$ punto de silla.

c) $f(x;y) = x - 2y + \ln(\sqrt{x^2+y^2}) + 3\arctan\left(\frac{y}{x}\right), x > 0$

d) $f(x;y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y),\ \frac{\pi}{2} < x < \pi,\ \frac{\pi}{2} < y < \pi$

$$R. Mín. en \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$$

e) $f(x;y) = 8y^2e^{x^2-y^2}$ R. Mín. en $(0;-1)$, punto de silla en $(0;1)$

f) $f(x;y) = \dfrac{y(x^3-3x)}{y^2+4}$ g) $f(x;y) = \dfrac{1}{3}e^{\sqrt[3]{y^2-y+x^2}}$

h) $f(x;y) = 8ye^x - \dfrac{1}{3}(y^3+e^{3x})$ $R. Máx. en\ (2\ln 2\,; 2)$

3.- Analice para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función

$$f(x;y) = a(x-1)(y-2) - (x-1)^2 - (y-2)^2$$

tiene en (1;2) un máximo, un mínimo o un punto de silla.

R. Tiene un mínimo para $a \in \langle -2;2 \rangle$. Punto de silla para $a \in \langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$

4.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, tal que

$$\nabla f(x;y) = \big((x-1)(2x+y-2); (y-1)(2x-y-6)\big)$$

Halle los puntos críticos de f y clasifíquelos.

5.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, tal que su matriz hessiana en el punto $P_0(m;n)$ es

$$H(f(m;n)) = \begin{bmatrix} m+3 & m-1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Para qué valores de m, $f(P_0)$ es un valor mínimo relativo? R. $m = 2$

6.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables, tal que su matriz hessiana en un punto genérico $(x;y)$ es

$$H\big(f(x;y)\big) = \begin{bmatrix} 4-x & 3x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $(a;a)$ es un punto crítico de f, ¿para qué valores de a el punto $(a;a;f(a;a))$ es un punto de silla? R. $a > 1$

7.- Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en $\mathbb{R}^2$ tal que $A(2;-1)$ es un punto crítico de f.
En cada caso, indique si el punto crítico corresponde a un extremo relativo o a un punto de silla.

a) $f_{xx}(2;-1) = -3$, $f_{xy}(2;-1) = 2$ y $f_{yy}(2;-1) = -8$

b) $f_{xx}(2;-1) = 25,\ f_{xy}(2;-1) = 10$ y $f_{yy}(2;-1) = 8$

c) $f_{xx}(2;-1) = -4,\ f_{xy}(2;-1) = 6$ y $f_{yy}(2;-1) = 9$

8.- En los siguientes ejercicios, halle los extremos absolutos de la función en la región D indicada

a) $f(x;y) = 8x^2 - 4xy + 5y^2 - 4x - 8y$, D es la región triangular limitada por las rectas $x = 0, y = 0, x + y = 3$

R. Máx. absoluto en $(3;0)$ y Mín. absoluto en $(1/2;1)$

b) $f(x;y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$, D es la placa rectangular $0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$

c) $f(x;y) = x^2 + y^2 - 2x$, D es la región limitada por el triángulo cuyos vértices son los puntos $(0;0)$, $(2;0)$ y $(0;2)$.

R. Máx. absoluto en $(0;2)$ y Mín. absoluto en $(1;0)$.

d) $f(x;y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2$, D es la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 9$.

9.- Una placa circular plana tiene la forma de la región

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

La placa, incluido la frontera $x^2 + y^2 = 1$ se calienta de manera que la temperatura en cualquier punto (x;y) es $T(x;y) = x^2 + 2y^2 - x$.

Determine los puntos más calientes y más fríos de la placa, asi como la temperatura en cada uno de ellos.

10.- Halle la mínima distancia del origen al cono $z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$R.\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

11.- Halle tres números reales positivos, tal que su suma es 24 y su producto es un máximo. R. Los números son 8,8,8

12.- Cuál es el volumen máximo del paralelepípedo rectangular que se puede inscribir en el elipsoide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{36} = 1$ $R.\ 64\sqrt{3}$

13.- Suponga que se desea construir una caja rectangular que contenga 32 cm^3 de oro en polvo. Se utilizan tres materiales diferentes en la construcción. El material para los lados cuesta un dólar el centímetro cuadrado, el material para la parte inferior cuesta 3 doláres el centímetro cuadrado y el material para la parte superior cuesta 5 doláres el centímetro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja menos costosa?

R. Base de la caja es un cuadrado de 2×2 y al tura 8 cm.

14.- Un agricultor que produce zapallo y maíz determina que la ganancia g (en miles de nuevos soles) que obtiene al vender y kilogramos de zapallo y x kilogramos de maíz está dada por

$$g(x;y) = 10^{-4}y + 3(10^{-4})x - 10^{-8}(2y^2 + 3x^2)$$

a) Halle el nivel de producción que le da la máxima ganancia.

R. 2500 kg de zapallo y 5000 kg de maíz.

b) Halle la máxima ganancia R. S/. 875

15.- Una tienda de calzado de la provincia de Cañete vende dos marcas de zapatillas de varones: una marca local que obtiene a un costo de S/. 30 el par y una marca nacional que obtiene a un costo de S/. 40 el par. El dueño calcula que si la marca local se vende a "x" nuevos soles el par y la marca nacional a "y" nuevos soles el par, entonces se venderán cada mes aproximadamente $70 - 5x + 4y$ pares de zapatillas de la marca local y $80 + 6x - 7y$ pares de zapatillas de la marca nacional. Halle el precio de venta que debería fijar el dueño a cada par de zapatillas de ambas marcas para maximizar la utilidad.

R. Marca local a S/. 53 el par y marca nacional a S/. 55 el par.

16.- En un supermercado se venden dos productos que compiten entre sí a precios de x e y nuevos soles respectivamente. Si el ingreso debido a la venta de estos productos viene dado por

$$I(x;y) = -7x^2 - 4y^2 + 2xy + 10x + 14y$$

Calcule los precios para que el ingreso sea máximo.

R. Precios S/. 1 y S/. 2 respectivamente.

17.- Una lechería produce dos tipos de queso a un costo medio constante de 50 y 60 soles por kilo respectivamente. Si el precio de venta del primer tipo es x soles por kilo y el segundo y soles por kilo, el número de kilos que pueden venderse cada semana viene dada por $N_1 = 250(y - x)$ y $N_2 = 32000 + 250(x - 2y)$. Demuestre que, para el máximo provecho, los precios de venta deben fijarse en 89 y 94 soles por kg respectivamente.

18.- En una tienda de alimentos se venden dos tipos de emparedados. El costo de hacerlos es de 70 céntimos y 90 céntimos respectivamente. El propietario estima que se venden en x céntimos el primer tipo y en y céntimos el segundo tipo, entonces el número de emparedados que se venderá de cada tipo será $240(y - x)$ y $240(150 + x - 2y)$, respectivamente. ¿En cuánto debe venderse cada emparedado para obtener la utilidad máxima?

R. 110 y 120 céntimos.

19.- Una empresa tiene tres fábricas, en cada una se elabora el mismo producto. Si la fábrica A produce x unidades, la fábrica B y unidades y la fábrica C produce z unidades, y sus respectivos costos de producción son: $3x^2 + 200$, $y^2 + 400$, $2z^2 + 300$; y si hay un pedido de 1100 unidades, ¿cómo debe distribuirse la producción entre las tres fábricas a fin de minimizar el costo de producción total?. R. $A = 200, B = 600$ y $C = 300$.

20.- La fábrica Pallancos S.A. planea vender un nuevo producto a S/. 15 la unidad y estima que si invierte x miles de nuevos soles en desarrollo e y miles de nuevos soles en publicidad, los consumidores compran aproximadamente

$\frac{540y}{y^2+9} + \frac{160x}{x^2+4}$ unidades del producto al mes.

Si el costo de fabricación de este producto es S/. 5 por unidad, ¿cuánto debería invertir la fábrica en desarrollo y en publicidad para generar la mayor utilidad?.

R. S/. 2500 en desarrollo y 3000 en publicidad, mensualmente.

4.2 EXTREMOS CONDICIONADOS

El matemático fránces J.L. Lagrange ideó un procedimiento para el problema de determinar máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones de enlace o restricciones. Este método se conoce como *Método de Multiplicadores de Lagrange.*

Por ejemplo, para hallar la distancia mínima de un punto de la superficie $g(x;y;z) = 0$ al origen, debemos minimizar la función

$$d^2 = f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sujeta a la condición $g(x;y;z) = 0$. Una condición como ésta es llamada condición de enlace. En general, se tiene la siguiente definición:

Definición 7.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de n variables con dominio el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$

i) Se dice que las coordenadas del punto $P(x_1; x_2; \dots; x_n) \in D$ satisfacen las condiciones de enlace, si existen funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ \varphi_m(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0 \end{cases}, m < n \qquad (*)$$

ii) Se dice que f presenta un valor máximo condicionado en el punto $P_0 \in D$ si

$$f(P_0) \geq f(P)$$

para todo P y P_0 que satisfacen las condiciones de enlace (*).

iii) Se dice que f presenta valor mínimo condicionado en el punto $Q_0 \in D$ si

$$f(Q_0) \leq f(Q)$$

para todo Q y Q_0 que satisfacen las condiciones de enlace (*).

MÉTODO DE MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en el conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que las coordenadas del punto $P(x_1, \ldots, x_n) \in D$ satisfacen las condiciones de enlace (*). Para hallar los valores extremos condiciones de f sujeta a las condiciones de enlace (*), se procede de la siguiente manera:

Paso 1.- Construir la función L de Lagrange dada por

$$\begin{aligned} L &= L(x_1; \ldots; x_n; \lambda_1; \ldots; \lambda_m) \\ &= f(x_1; \ldots; x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1; \ldots; x_n) + \cdots + \lambda_m \varphi_m(x_1; \ldots; x_n) \end{aligned}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son los multiplicadores de Lagrange.

Paso 2.- Hallar los puntos críticos de la función L, al resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(x_1; \ldots; x_n) = 0 \\ \quad \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(x_1; \ldots; x_n) = 0 \end{cases}$$

Para resolver el sistema, eliminamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ de las n primeras ecuaciones y los resultados lo sustituimos en las m últimas ecuaciones tratando de no perder soluciones con las simplificaciones.

Paso 3.- De acuerdo a la naturaleza del problema, se decide si el punto crítico corresponde a un valor máximo o mínimo condicionado de f. Es decir, se calcula el valor de la función f en los puntos críticos; el mayor valor es ei máximo condicionado de f y el menor valor es el mínimo condicionado de f.

Ejemplo 19.- Halle los extremos condicionados de $f(x;y) = x^2 + y^2$ sujeto a la condición de enlace $x + y = 2$.

Solución

Sea la función de Lagrange

$$L(x;y;\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$$

Para hallar los puntos críticos de esta función, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Restando las dos primeras ecuaciones, se obtiene $y = x$, y sustituyendo en la tercera ecuación, resulta $x = y = 1$.

Así, el único punto crítico es $P_0(1;1)$

Ahora, para determinar su naturaleza elegimos el punto $Q_0(2;0)$ que satisface la condición de enlace $x + y - 2 = 0$. Luego, se tiene

$f(1;1) = 1 + 1 = 2$ y $f(2;0) = 4 + 0 = 4$

Por tanto, la función f presenta un mínimo condicionado en el punto $P(1;1)$

Ejemplo 20.- Halle los extremos condicionados de la función $f(x;y;z) = xyz$, sujeta a las condiciones de enlace $\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = x + y - z - 3 = 0 \\ \varphi_2(x;y;z) = x - y - z - 8 = 0 \end{cases}$ ... (*)

Solución

La función de Lagrange es

$$L(x;y;z;\lambda;u) = xyz + \lambda(x + y - z - 3) + u(x - y - z - 8)$$

Para hallar los puntos críticos de la función L, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} L_x(x;y;z;\lambda;u) = yz + \lambda + u = 0 & \dots(1) \\ L_y(x;y;z;\lambda;u) = xz + \lambda - u = 0 & \dots(2) \\ L_z(x;y;z;\lambda;u) = xy - \lambda - u = 0 & \dots(3) \\ L_\lambda(x;y;z;\lambda;u) = x + y - z - 3 = 0 & \dots(4) \\ L_u(x;y;z;\lambda;u) = x - y - z - 8 = 0 & \dots(5) \end{cases}$$

Al eliminar λ y u en las ecuaciones (1) y (3), se obtiene

$$y(x+z) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \ \vee \ x + z = 0$$

Para $y = 0$ no existe solución. Luego, suponiendo que $y \neq 0$ resulta $x = -z$ (6)

Al reemplazar (6) en (4) y (5), se tiene

$$\begin{cases} y - 2z - 3 = 0 \\ -y - 2z - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\dfrac{11}{4}, y = -\dfrac{5}{2}, x = \dfrac{11}{4} \end{cases}$$

Así, el único punto crítico es $P_0\left(\frac{11}{4}; -\frac{5}{2}; -\frac{11}{4}\right)$

Para determinar la naturaleza del extremo condicionado, se elige el punto $Q_0\left(\frac{15}{4}; -\frac{5}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ que satisfaga las condiciones de enlace (*). Luego, se tiene

$$f(P_0) = f\left(\frac{11}{4}; -\frac{5}{2}; -\frac{11}{4}\right) = \left(\frac{11}{4}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{605}{32}$$

$$f(Q_0) = f\left(\frac{15}{4}; -\frac{5}{2}; -\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{15}{4}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{525}{32}$$

Por tanto, la función f presenta un máximo condicionado en el punto

$$P_0\left(\frac{11}{4}; -\frac{5}{2}; -\frac{11}{4}\right)$$

Ejemplo 21.- El cono $z^2 = x^2 + y^2$ es cortado por el plano $z = 1 + x + y$ en una curva C. Halle los puntos de C que están más próximos y más alejados del origen.

Solución

Sea $P(x;y;z)$ un punto de la curva C. Luego, la distancia del punto P al origen de coordenadas es $d(0;P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Optimizar la función distancia es equivalente a optimizar la función distancia al cuadrado.

Así, la función a optimizar es $f(x;y;z) = d^2(0;P) = x^2 + y^2 + z^2$

sujeta a las condiciones de enlace $\begin{cases} \varphi_1(x;y;z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ \varphi_2(x;y;z) = x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

Entonces la función de Lagrange es

$$L(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) + u(x + y - z + 1)$$

Al igualar a cero las derivadas parciales de primer orden de L, se tiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} L_x(x;y;z;\lambda;u) = 2x + 2\lambda x + u = 0 & \dots(1) \\ L_y(x;y;z;\lambda;u) = 2y + 2\lambda y + u = 0 & \dots(2) \\ L_z(x;y;z;\lambda;u) = 2z - 2\lambda z - u = 0 & \dots(3) \\ L_\lambda(x;y;z;\lambda;u) = x^2 + y^2 - z^2 = 0 & \dots(4) \\ L_u(x;y;z;\lambda;u) = x + y - z + 1 = 0 & \dots(5) \end{cases}$$

Al restar la ecuación (2) de (1), se obtiene

$$(\lambda + 1)(x - y) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \vee x = y \quad \dots(6)$$

Al sumar la ecuaciones (2) y (3), resulta

$$y + z + \lambda(y - z) = 0 \quad \dots(7)$$

Al reemplazar $\lambda = -1$ (de la ecuación (6)) en la ecuación (7), se obtiene

$$y + z - (y - z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

Al sustituir $z = 0$ en la ecuación (4), se obtiene $y = x = 0$. Sin embargo, las coordenadas del punto $(0;0;0)$ no satisfacen la ecuación (5). De este modo $\lambda \neq -1$, lo cual implica que $x = y$ (ecuación (6)).

Ahora, al reemplazar $y = x$ en las ecuaciones (4) y (5), se obtiene

$$2x^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Así, los puntos críticos de f son

$$P_1\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 + \sqrt{2}\right) \text{ y } P_2\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}; -1 - \sqrt{2}\right)$$

Luego,

$$f(P_1) = 6 - 4\sqrt{2} \text{ y } f(P_2) = 6 + 4\sqrt{2}$$

Por tanto, el punto P_1 está más próximo al origen y el punto P_2 está más alejado del origen.

Ejemplo 22.- Un disco circular tiene la forma de una región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Si T es la temperatura (en grados Celsius) en cualquier punto $(x;y)$ del disco y $T(x;y) = 2x^2 + y^2 - y$, encuentre los puntos más calientes y más fríos del disco.

Solución

La función a optimizar es $T(x;y) = 2x^2 + y^2 - y$, sujeta a la condición de enlace $\varphi(x;y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Luego, la función de Lagrange es

$$L(x;y;\lambda) = 2x^2 + y^2 - y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

Al igualar a cero las derivadas de primer orden de esta función, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} L_x(x;y;\lambda) = 4x + 2\lambda x = x(4+2\lambda) = 0 & \dots(1) \\ L_y(x;y;\lambda) = 2y - 1 + 2\lambda y = 0 & \dots(2) \\ L_\lambda(x;y;\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 & \dots(3) \end{cases}$$

De la ecuación (1), se tiene

$$\lambda = -2 \vee x = 0$$

Al reemplazar $\lambda = -2$ en la ecuación (2), se obtiene $y = -1/2$ y al sustituir este valor en la ecuación (3), resulta $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

En forma similar, al reemplazar $x = 0$ en la ecuación (3), se obtiene $y = \pm 1$.

Así, los puntos críticos de la función $T(x;y)$ son

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right), P_3(0;1) \text{ y } P_4(0;-1)$$

y los valores de la función temperatura en estos puntos son

$$T(P_1) = \frac{9}{4}, T(P_2) = \frac{9}{4}, T(P_3) = 0 \text{ y } T(P_4) = 2$$

Por consiguiente, los puntos más calientes de la placa circular son

$$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right) \text{ y } P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right), \text{ y el punto más frío } P_3(0;1).$$

Ejemplo 23.- Sea $P_0(x_0;y_0;z_0)(x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0)$ un punto sobre la superficie $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} + \dfrac{z^2}{16} = 1$

a) Calcule el volumen del sólido limitado por los planos cartesianos y el plano tangente al elipsoide en el punto P_0.

b) Halle P_0 que está sobre el elipsoide de modo tal que el volumen del sólido sea mínimo.

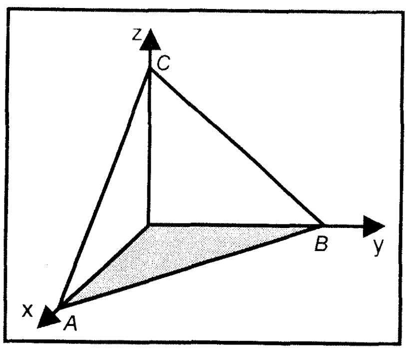


Fig. 4.11

Solución

a) Puesto que P_0 es un punto sobre el elipsoide, entonces sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$G(x_0;y_0;z_0) = 4x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 - 16 = 0$$

Luego, $\nabla G(x_0; y_0; z_0) = (8x_0; 4y_0; 2z_0) = 2(4x_0; 2y_0; z_0) = \vec{N}$ es normal al plano tangente al elipsoide en el punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$. Por consiguiente, el plano tangente al elipsoide en P_0 es

$$P_T: 4x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow P_T: 4x_0 x + 2y_0 y + z_0 z - 16 = 0$$

Los puntos de intersección del plano tangente con los ejes coordenados son

$$A\left(\frac{4}{x_0}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{8}{y_0}; 0\right) \text{ y } C\left(0; 0; \frac{16}{z_0}\right)$$

El volumen del sólido (tetraedro) limitado por los planos cartesianos y el plano tangente al elipsoide en P_0 es

$$V = \frac{1}{3}(\text{área de la base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{4}{x_0}.\frac{8}{y_0}\right).\left(\frac{16}{z_0}\right) = \frac{256}{3x_0 y_0 z_0}$$

b) La función a minimizar es

$$V = f(x_0; y_0; z_0) = \frac{256}{3x_0 y_0 z_0}$$

sujeta a la condición de enlace

$$G(x_0; y_0; z_0) = 4x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 - 16 = 0$$

Así, la función de Lagrange es

$$L(x_0; y_0; z_0; \lambda) = \frac{256}{3x_0 y_0 z_0} + \lambda(4x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 - 16)$$

Los puntos críticos se obtienen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_{x_0}(x_0; y_0; z_0; \lambda) = -\dfrac{256}{3x_0^2 y_0 z_0} + 8\lambda x_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{32}{3x_0^3 y_0 z_0} & \ldots(1) \\ L_{y_0}(x_0; y_0; z_0; \lambda) = -\dfrac{256}{3x_0 y_0^2 z_0} + 4\lambda y_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{64}{3x_0 y_0^3 z_0} & \ldots(2) \\ L_{z_0}(x_0; y_0; z_0; \lambda) = -\dfrac{256}{3x_0 y_0 z_0^2} + 2\lambda z_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{128}{3x_0 y_0 z_0^3} & \ldots(3) \\ L_\lambda(x_0; y_0; z_0; \lambda) = 4x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 - 16 = 0 & \ldots(4) \end{cases}$$

Al igualar (1) y (2), se obtiene $y_0^2 = 2x_0^2 \ldots.(5)$, y al igualar (1) y (3), se obtiene $z_0^2 = 4x_0^2 \ldots(6)$

Al sustituir (5) y (6) en (4), resulta

$$4x_0^2 + 4x_0^2 + 4x_0^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 12x_0^2 = 16 \Leftrightarrow x_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

y al reemplazar este valor en (5) y (6), se obtiene $y_0 = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}, z_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Así, el único punto crítico de f es $P_0\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$

Para determinar la naturaleza del extremo condicionado, se elige el punto $Q_0(1; 2; 2)$ que satisface la condición de enlace (4). Luego, se tiene

$$V = f(P_0) = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt{3}}\right) = 8\sqrt{6} \cong 19{,}6$$

$$V = f(1; 2; 2) = \frac{64}{3} \cong 21{,}33$$

Por tanto, el volumen del tetraedro es mínimo para el punto $P_0\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}; \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)$

Ejemplo 24.- Una organización internacional debe decidir cómo gastar los \$ 4000 que se le han asignado para aliviar la extrema pobreza en el departamento de Ayacucho. Esperan dividir el dinero entre comprar trigo a \$ 5 el saco y kiwicha a \$ 10 el saco. Para el número P de personas que se alimentarán se comprarán x sacos de trigo e y sacos de kiwicha. Luego, P está dado por

$$P(x; y) = x + 2y + \frac{x^2y^2}{2(10^8)}$$

¿Cuál es el número máximo de personas que pueden alimentarse, y cómo la organización debe asignar su dinero?

Solución

La función a maximizar es $P(x; y)$ sujeta a la condición de enlace

$$5x + 10y = 4000$$

Así, la función de Lagrange es

$$L(x; y; \lambda) = x + 2y + \frac{x^2y^2}{2(10^8)} + \lambda(5x + 10y - 4000)$$

Al igualar a cero las derivadas parciales de primer orden de la función L, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} L_x(x; y; \lambda) = 1 + \dfrac{xy^2}{10^8} + 5\lambda = 0 & \ldots(1) \\ L_y(x; y; \lambda) = 2 + \dfrac{x^2y}{10^8} + 10\lambda = 0 & \ldots(2) \\ L_\lambda(x; y; \lambda) = 5x + 10y - 4000 = 0 & \ldots(3) \end{cases}$$

Al multiplicar la ecuación (1) por 2 y restar la ecuación (2), se obtiene

$$\frac{2xy^2}{10^8} - \frac{x^2y}{10^8} = 0 \Leftrightarrow xy(2y - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor y = 0 \lor x = 2y$$

Al reemplazar estos valores en la ecuación (3), se obtiene los puntos críticos

$$P_1(0; 400), P_2(800; 0) \text{ y } P_3(400; 200)$$

y los valores de la función $P(x; y)$ en estos puntos son

$$P(P_1) = P(0; 400) = 800$$
$$P(P_2) = P(800; 0) = 800$$
$$P(P_3) = P(400; 200) = 832$$

Por tanto, el número máximo de personas que pueden alimentarse es 832 y la organización internacional debe asignar \$ 2000 para comprar 400 sacos de trigo y \$ 2000 para comprar 200 sacos de kiwicha.

Ejemplo 25.- Un servicio de entrega de paquetes establece que las dimensiones de una caja rectangular deben ser tales que, el largo más el doble del ancho, más el doble de la altura sea igual a 120 cm. Determine el volumen máximo de la caja rectangular que puede enviarse.

Solución

Sea x la medida del largo, y la medida del ancho y z la medida de la altura de la caja respectivamente.

La función a maximizar es $V = xyz$ sujeta a la condición de enlace

$$x + 2y + 2z = 120$$

Así, la función de Lagrange es

$$L(x; y; z; \lambda) = xyz + \lambda(x + 2y + 2z - 120) \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$$

Al igualar a cero las derivadas parciales de primer orden de L, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

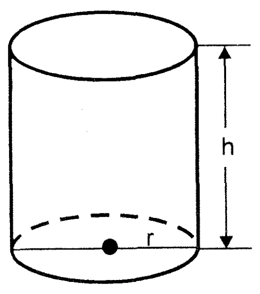
$$\begin{cases} L_x(x; y; z; \lambda) = yz + \lambda = 0 & \dots(1) \\ L_y(x; y; z; \lambda) = xz + 2\lambda = 0 & \dots(2) \\ L_z(x; y; z; \lambda) = xy + 2\lambda = 0 & \dots(3) \\ L_\lambda(x; y; z; \lambda) = x + 2y + 2z - 120 = 0 & \dots(4) \end{cases}$$

Al resolver estas cuatro ecuaciones, se obtiene el único punto crítico $P_0(40; 20; 20)$

Para determinar la naturaleza del extremo condicionado, se elige el punto $Q_0(40; 10; 30)$ que satisface la condición de enlace $x + 2y + 2z = 120$. Luego, se tiene

$$V(P_0) = V(40; 20; 20) = (40)(20)(20) = 16000\ cm^3$$
$$V(Q_0) = V(40; 10; 30) = (40)(10)(30) = 12000\ cm^3$$

Por tanto, las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo son largo 40 cm, ancho 20 cm y altura 20 cm.



Ejemplo 26.- Un cilindro circular recto cerrado con un volumen de 8000 pies cúbicos se construye con dos clases de material. La tapa y la base del cilindro se hacen de un metal que cuesta S/. 16 el pie cuadrado. La cara lateral se cubre con un metal que cuesta S/. 20 el pie cuadrado. Calcule las dimensiones del cilindro para que el costo de construcción sea mínimo.

Solución

La función de costo de construir un cilindro de radio r y altura h es

$$C(r;h) = 16(2\pi r^2) + 20(2\pi rh) = 32\pi r^2 + 40\pi rh$$

Como el volumen del cilindro debe ser: $V = \pi r^2 h = 8000$, entonces la función de Lagrange es

$$L(r;h;\lambda) = 32\pi r^2 + 40\pi rh + \lambda(\pi r^2 h - 8000)$$

Así, el sistema de ecuaciones para encontrar el punto crítico es:

$$\begin{cases} L_r(r;h;\lambda) = 64\pi r + 40\pi h + 2\lambda\pi rh = 0 & \ldots(1) \\ L_h(r;h;\lambda) = 40\pi r + \pi\lambda r^2 = 0 & \ldots(2) \\ L_\lambda(r;h;\lambda) = \pi r^2 h - 8000 = 0 & \ldots(3) \end{cases}$$

Al multiplicar la ecuación (1) por r y (2) por $2h$, y restar estos resultados, se obtiene

$$64\pi r^2 - 40\pi rh = 0 \Leftrightarrow 8\pi r(8r - 5h) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = \frac{5}{8}h$$

Puesto que $r = 0$ no satisface la ecuación (3) se toma $r = \frac{5}{8}h$ y se sustituye en (3).

De donde resulta $h = \dfrac{80}{\sqrt[3]{25\pi}}$, $r = \dfrac{50}{\sqrt[3]{25\pi}}$

Luego, el único punto crítico es $P_0\left(\dfrac{50}{\sqrt[3]{25\pi}}; \dfrac{80}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)$

Por tanto, el costo mínimo de construcción es

$$C\left(\frac{50}{\sqrt[3]{25\pi}}; \frac{80}{\sqrt[3]{25\pi}}\right) = 9600\sqrt[3]{25\pi} \cong S/.41111{,}9295$$

EJERCICIOS

1.- Utilice multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo de la función, sujeto a la restricción dada.

a) $f(x;y) = 25 - x^2 - y^2,\ \ x^2 + y^2 - 4y = 0$

R. Valor mínimo $f(0;4) = 9$ Valor máximo $f(0;0) = 25$

b) $f(x;y) = xy,\ \ x^2 + y^2 = 4$

c) $f(x;y) = x^2 + 2y^2 + 3xy + 1,\ \ x - y = 1$

R.Valor máximo $f\left(\frac{7}{12}; -\frac{5}{12}\right) = \frac{23}{24}$

d) $f(x;y) = 3x^3 + y^3 + x^2y,\ \ x + y = 10$

R. Valor máximo $f(-30;40) = 19000$. Valor mínimo $f\left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right) \cong 481{,}48$

e) $f(x;y) = x^2 + 12xy + 2y^2,\ \ 4x^2 + y^2 = 25$

f) $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2,\ \ 3x - 2y + z - 4 = 0$

g) $f(x;y;z) = x^2 + xy + y^2 + 3z^2,\ \ x + 2y + 4z = 60$

h) $f(x;y;z) = xyz,\ \ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ *R.* $(3;3;3)$ es punto crítico.

i) $f(x;y;z) = a(a-x)(a-y)(a-z),\ \ x + y + z = 2a\ (a > 0)$

R. $\left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}\right)$ es punto crítico.

j) $f(x;y;z) = x^3 + y^3 + 2z^3;\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$

2.- Encuentre los puntos de la curva de intersección del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ con el plano $x - 4y - z = 0$, que están más cercanos del origen de coordenadas. Encuentre la distancia mínima.

3.- Sea $\mathcal{C}$ la curva de intersección entre las dos superficies

$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1,\ \ x^2 + y^2 = 1$

Halle los puntos de la curva $\mathcal{C}$ que están más cerca del origen de coordenadas

R. $(0;\pm1;0)$ y $(\pm1;0;0)$

4.- Encuentre un punto de la superficie $xyz = 25$ en el primer octante que hace que $Q = 3x + 5y + 9z$ sea mínimo

R. $\left(5;3;\frac{5}{3}\right)$

5.- ¿Qué punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ se encuentra más alejado del punto $A(1; -1; 1)$? R. $2\sqrt{3}(-1; 1; -1)$

6.- ¿Cuál es el máximo volumen de una caja rectangular, si la suma de las longitudes de las aristas es a?

$$R.\ V = \frac{a^3}{12^3}$$

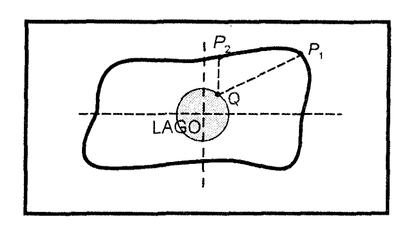
7.- Determine el radio y la altura del cilindro de máximo volumen que puede inscribirse en una esfera de radio a.

$$R.\ r = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}, \qquad h = \frac{2}{\sqrt{3}}a$$

8.- Encuentre los puntos de la curva C: $x^4 + y^4 + 3xy = 2$, que están más cercanos y más alejados del origen de coordenados.

$R.$ Más cercanos $A\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, más alejados $B(\pm\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$

9.- El costo de taladrar un túnel a través de un cerro es proporcional al cuadrado de la longitud del túnel. Se debe excavar dos túneles rectos desde los puntos P_1 y P_2 exteriores de un volcán hasta un punto común Q en la orilla de su lago circular interno. Trazando coordenadas se obtiene el lago como $x^2 + y^2 = 1$ y los puntos P_1 y P_2 como (4;5) y (2;3) respectivamente. Halle Q de modo que minimice el costo.



$$R.\ Q\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$$

10.- Una caja rectangular debe tener una base de aluminio, lados de cartón y tapa de plástico. Los costos por dm^2 de aluminio, cartón y tapa de plástico son de 20, 4 y 7 soles respectivamente. Si el volumen debe ser 27 dm^3, ¿qué dimensiones minimizarán el costo de la caja?.

11.- Una caja rectangular sin tapa y sin fondo debe tener un volumen de $V\ pies^3$. Determine las dimensiones de la caja para que el área superficial sea mínima.

R. minimizar $S = 2z(x + y)$ sujeto a $V = xyz$

12.- La temperatura en cualquier punto $(x; y)$ de la curva $4x^2 + 12y^2 = 1$ es T grados y $T = 4x^2 + 24y^2 - 2x$

Encuentre los puntos en la curva donde la temperatura es máxima y donde es mínima. También encuentre la temperatura en esos puntos.

$$R.\ Máx. en\ A\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)\ y\ mín. en\ B\left(\frac{1}{2};0\right)$$

13.- La empresa Pallancos vende dos productos: Vifer y Difer. Su utilidad en soles al vender x unidades de Vifer e y de Difer es

$U(x; y) = 20x + 40y - 0{,}1(x^2 + y^2)$

Si la empresa puede vender un máximo de 400 unidades de los dos productos, ¿qué combinación le producirá la máxima utilidad?

R. Vender 150 unidades de Vifer y 250 unidades de Difer.

14.- Un fabricante puede producir tres productos distintos en cantidades Q_1, Q_2, Q_3 respectivamente y de aquí extraer un beneficio de

$U(Q_1; Q_2; Q_3) = 2Q_1 + 8Q_2 + 24Q_3$

Halle los valores de Q_1, Q_2, Q_3 que hacen máximo el beneficio, si la producción está sujeta a la condición $Q_1^2 + 2Q_2^2 + 4Q_3^2 = 4500000000$

R. $Q_1 = 10000$, $Q_2 = 20000$, $Q_3 = 30000$

15.- Supóngase que una compañía produce dos artículos similares y que ejerce el monopolio del mercado para dicho artículo. Además, supóngase que las demandas de esos dos artículos a los que se designará por x e y, respectivamente, como funciones de su precio p y q, están expresadas por $x = f(p; q)$ y $y = g(p; q)$. Si se designa con $C(x; y)$ el costo que representa a la compañía de producir esas cantidades de los dos artículos, la función utilidad estará expresada por $P = px + qy - C(x; y)$. Si los costos de producción son de S/. 300 por unidad del primer artículo, S/. 200 por unidad del segundo, y si las ecuaciones del precio-demanda son: $x = 600 - 2p + q$, $y = 800 + p - 3q$, halle los precios que maximizan la utilidad e indique cuál es su valor máximo.

16.- Las normas postales vigentes de un país establecen que se puede enviar por correo un bulto rectangular de aristas x, y, z pulgadas, siendo $x \leq y \leq z$, sólo si $2(x + y) + z$ es igual a 120 pulgadas. Si un cierto producto que pesa 10 libras por pul^3 debe ser despachado por correo, determine qué cantidad

máxima de tal producto podrá ser transportada en 12 paquetes postales en tales condiciones.

17.- Los cursos de dos ríos (dentro de los límites de una región determinada) representan aproximadamente una parábola $y = x^2$ y una recta $x - y - 2 = 0$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Por qué puntos del plano habrá que trazarlo?

$$R.\ P_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right),\ P_2\left(\frac{11}{8};-\frac{5}{8}\right)$$

18.- Se sabe que en la producción de cierto artículo se usa la siguiente ley: $f(x;y) = x^2 + (y-2)^2$ en la que x e y están dados en kilogramos y son los insumos necesarios que están relacionados según la ecuación $x^2 = 1 + y^2$. Se pide averiguar para qué valores de x e y la producción es máxima y para qué valores es mínima.

19.- Un recipiente se construye con un cilindro recto de radio 5 pies y con tapas en forma de cono en los extremos del cilindro. Si el volumen total es V pies cúbicos, halle la altura H del cilindro y la altura h de cada una de las tapas cónicas de manera que el área de la superficie total sea la menor posible.

$$R.\ h = 2\sqrt{5},\ H = \frac{V}{25} - \frac{4\pi\sqrt{5}}{3}$$

20.- Una sonda espacial de forma del elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ entra en la atmósfera de la tierra y su superficie comienza a calentarse. Pasada una hora, la temperatura en el punto $(x;y;z)$ sobre la superficie de la sonda es $T(x;y;z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$. Determínese el punto más caliente de la sonda.

$$R.\ P_1\left(\frac{4}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)\ \text{y}\ P_2\left(-\frac{4}{3};-\frac{4}{3};-\frac{4}{3}\right)$$

21.- Sea C la curva de intersección de las superficies

$S_1: x^2 + z^2 = 2y\,,\ S_2: x - y + z + 3 = 0$

Encuentre los puntos de la curva C que están más alejados y más cercanos al plano XZ.

R. $P_1(3;9;3)$ es el punto más alejado y $P_2(-1;1;-1)$ el más cercano.

22.- Un fabricante tiene S/. 80000 para invertir en desarrollo y publicidad de un nuevo producto. Se estima que si se invierten x miles de soles en desarrollo e y miles de soles en publicidad, se venderán aproximadamente

$V(x;y) = 20x^{3/2}y$ unidades. ¿Cuánto dinero debería asignar el fabricante a desarrollo y cuánto a publicidad para maximizar las ventas?

R. S/. 48000 a desarrollo y S/. 32000 a publicidad

23.- Si $T(x;y;z) = x + 2y + 3z$ representa la temperatura en cada punto del cilindro $x^2 + y^2 - 2 = 0$, halle las temperaturas extremas en la curva formada por la intersección del plano $y + z = 1$ y el cilindro.

R. Temperatura mínima en A(-1;1;0) y máx. en B(1;-1;2)

24.- Una empresa planea gastar 10000 dólares en publicidad en radio y televisión. Se sabe que el minuto de publicidad en la televisión cuesta 3000 dólares, mientras que en la radio cuesta 1000 dólares. Si x es el número de minutos de publicidad que contrata en la televisión e y el número de minutos que contrata en la radio, su ingreso por ventas es

$G(x;y) = -2x^2 - y^2 + xy + 4x + 6y + 10$

¿Cuántos minutos debe contratar en radio y cuánto en televisión para maximizar su ingreso por ventas?

R. 2 minutos en TV y 4 minutos en radio.

25.- En un experimento de aprendizaje, a un estudiante se le dan x minutos para examinar una hoja de datos. Dicha hoja de información se retira entonces y al estudiante se le permite y minutos para prepararse mentalmente para un examen basado en la hoja de información.

Suponga que se encuentra que la calificación alcanzada por el estudiante está dada por la expresión $A(x;y) = 2x^{3/2}y^{1/2}$

¿Cuál será la calificación máxima del estudiante si para examinar la hoja y prepararse mentalmente utilizó 12 minutos?

R. $54\sqrt{3} \cong 93{,}5\ puntos.$

26.- Un granjero planea cercar 7200 m^2 de terreno que tiene la forma rectangular, uno de cuyos lados limita con un río. Si solo debe cercar los tres lados no adyacentes al río, ¿cuál es la menor cantidad de cerco necesario para completar el trabajo? R. 240 m.

5 INTEGRALES MULTIPLES Y APLICACIONES

5.1 INTEGRALES DOBLES

En esta sección se introduce el concepto de integral doble de una función de dos variables, análoga al procedimiento usado en la sección 2.5 de *Tópicos de Cálculo* Vol. II.

Definición 1.- Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, cuando existe un rectángulo $R = [a; b] \times [c; d] \subset \mathbb{R}^2$ tal que $D \subset \mathbb{R}$. El rectángulo R se puede escribir como
$R = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b, \ \ c \leq y \leq d\}$
Esta región se ilustra en la Fig. 5.1

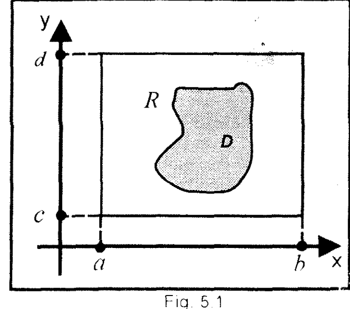


Fig. 5.1

Definición 2.- Una partición del rectángulo $R = [a; b] \times [c; d]$ es un conjunto de la forma

$$P = P_1 \times P_2 = \{[x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j] \ / \ 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m\}$$

Donde: $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición del intervalo $[a; b]$ y
$P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ es una partición del intervalo $[c; d]$

Observación 1:

a) Toda partición P del rectángulo R divide a este en nm sub-rectángulos de la forma
$R_{ij} = [x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j]$ (Fig.5.2)
$i = 1,2, \ldots, n$ y $j = 1,2, \ldots, m$

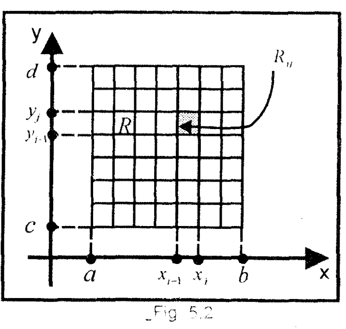


Fig 5.2

b) El área de cada sub-rectángulo R_{ij} para $i = 1,2, \ldots, n$ y $j = 1,2, \ldots, m$ es dado por
$A(R_{ij}) = \Delta_{ij} A = \Delta x_i \Delta y_j$

Se verifica,

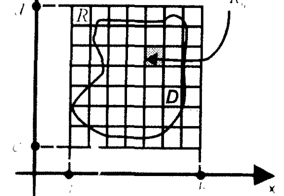
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta x_i \Delta y_j = (b - a)(d - c)$$

c) Se denomina norma de la partición P al número denotado por

$$\|P\| = max \{diag\,(R_{ij}) \ / \ 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m\}$$

Definición 3.- (Partición de un conjunto cerrado y acotado). Se denomina partición del conjunto cerrado y acotado $D \subset \mathbb{R}^2$, al conjunto de los subrectángulos R_{ij} del rectángulo R que contiene al conjunto D tal que tiene al menos un punto en común con el conjunto D, esto es,

$$P_D = \{R_{ij} \subset R \;/\; R_{ij} \cap D \neq \emptyset, 1 \leq i \leq n, \;\; 1 \leq j \leq m\}$$



Definición 4.- Se dice que una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el conjunto cerrado y acotado D es acotada, si existen números reales K_1 y K_2, tal que

$$K_1 \leq f(x;y) \leq K_2, \forall (x;y) \in D$$

FUNCIONES INTEGRABLES

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función acotada definida en la región cerrada y acotada D y $f(x;y) \geq 0$, $\forall (x;y) \in D$

Sea P_D una partición de D y sea $P_{ij}(x_i;y_j)$ un punto arbitrario escogido en $R_{ij} \subset P_D$ de modo que $f(P_{ij})$ está bien definido como se ilustra en la Fig. 5.3

La Suma de Riemman de la función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asociada a la partición P_D está dada por

$$S_R = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i;y_j)\Delta_{ij}A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i;y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

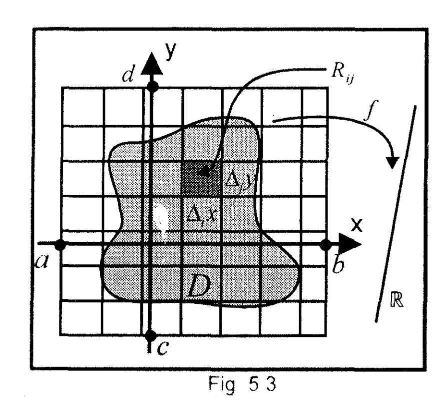


Fig 5 3

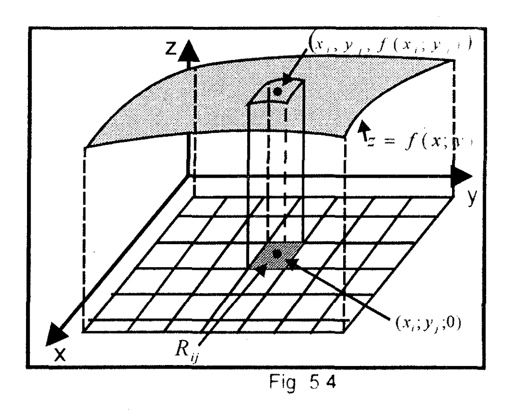


Fig 5 4

Observación 2.- Geométricamente, la suma de Riemman es la suma de los volúmenes de los paralelepípedos cuyas bases son los sub-rectángulos R_{ij} y cuyas alturas corresponden a los valores $f(x_i;y_j)$ (Fig. 5.4)

Definición 5.- Una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ acotada en la región cerrada y acotado D es integrable Riemman sobre D, si existe un número real L con la propiedad de que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i; y_j) \Delta x_i \Delta y_j - L \right| < \varepsilon$$

para toda partición P_D con $\|P_D\| < \delta$ y toda elección del punto $P_{ij}(x_j; y_j) \in R_{ij}$
El número L se llama integral doble de f sobre D y se indica con el símbolo

$$L = \iint_D f(x; y) dA = \lim_{\|P_D\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i; y_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Observación 3.- (Interpretación geométrica de la integral doble)

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre D y $f(x; y) \geq 0, \forall (x; y) \in D$, entonces la integral doble de f sobre D, esto es,

$$\iint_D f(x; y) dA = V(S)$$

representa el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = f(x; y)$ e inferiormente por la región D (Fig. 5.4).

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DOBLE

1.- Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región cerrada D, entonces f es integrable en D.

2.- Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en la región cerrada D y $c \in \mathbb{R}$, entonces cf es integrable en la región D y

$$\iint_D cf(x; y) dA = c \iint_D f(x; y) dA$$

3.- Si $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en la región cerrada D, entonces $f \pm g$ es integrable sobre D, y

$$\iint_D [f(x; y) \pm g(x; y)] dA = \iint_D f(x; y) dA \pm \iint_D g(x; y) dA$$

4.- Si $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en la región cerrada D y $f(x; y) \geq g(x; y), \forall (x; y) \in D$, entonces

$$\iint_D f(x;y)dA \geq \iint_D g(x;y)dA$$

En particular si $f(x;y) \geq 0, \forall(x;y) \in D$, entonces $\iint_D f(x;y)dA \geq 0$

5.- Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en la región cerrada D, y supongamos que m y M son los valores mínimo y máximo absoluto de f en D, esto es, $m \leq f(x;y) \leq M, \forall(x;y) \in D$. Entonces,

$$mA(D) \leq \iint_D f(x;y)dA \leq MA(D), \text{ donde } A(D) = \text{área de la región cerrada } D$$

6.- Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región cerrada D y $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son regiones cerradas, entonces

$$\iint_D f(x;y)dA = \iint_{D_1} f(x;y)dA + \iint_{D_2} f(x;y)dA$$

7.- Si $f(x;y) \geq 0, \forall(x;y) \in \Omega$ y $D \subset \Omega$, entonces

$$\iint_D f(x;y)dA \leq \iint_\Omega f(x;y)dA$$

8.- Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región cerrada D, entonces

$$\left|\iint_D f(x;y)dA\right| \leq \iint_D |f(x;y)|\, dA$$

En particular, si $|f(x;y)| \leq K, \forall(x;y) \in D$, entonces

$$\left|\iint_D f(x;y)dA\right| \leq K.A(D), \text{ donde } A(D) = \text{área de la región } D$$

9.- Teorema de Valor Medio.- Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región cerrada y acotada D, entonces existe un punto $(\xi;n) \in D$, tal que

$$\iint_D f(x;y)dA = f(\xi;n)\iint_D dA = f(\xi;n)A(D)$$

Ejemplo 1.- Aplique la propiedad 5 y determine la cota inferior y superior de la integral $\iint_D (x^2 + y^2)dA$, donde D es la región limitada por las rectas

$$x = -2, x = 3, y = x + 2 \wedge y = -2$$

Solución

La región D, como se muestra en la figura 5.5, se puede expresar como

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -2 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq x + 2\}$$

y la regla de correspondencia de la función integrando es

$$f(x; y) = x^2 + y^2$$

El valor mínimo absoluto de f ocurre en el punto $(0; 0) \in D$, que corresponde a un mínimo relativo de f y su valor es

$$m = f(0; 0) = 0$$

El valor máximo absoluto de f ocurre en el punto frontera $(3; 5) \in D$ y su valor es

$$M = f(3; 5) = 34$$

El área de la región D es

$$A(D) = \int_{-2}^{3} [(x + 2) - (-2)]dx = \int_{-2}^{3} (x + 4)dx = 22{,}5\ u^2$$

Por tanto, en virtud de la propiedad 5 resulta

$$mA(D) \leq \iint_D (x^2 + y^2)dA \leq MA(D) \Leftrightarrow 0 \leq \iint_D (x^2 + y^2)dA \leq 34(22{,}5) = 765$$

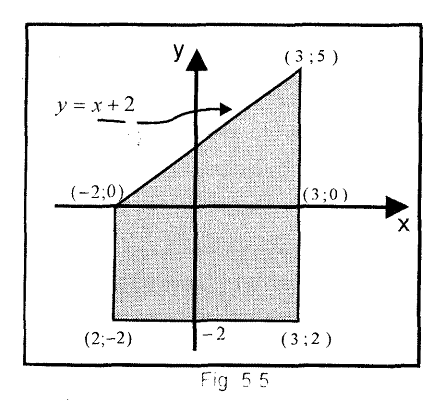


Fig 5.5

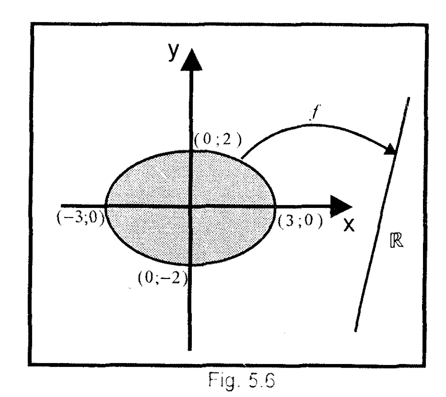


Fig. 5.6

Ejemplo 2.- Aplique la propiedad 5 de integrales y determine la cota inferior y superior de la integral $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA$, donde D es la región cerrada cuya

frontera es la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$

Solución

La región D, como se muestra en la figura 5.6, se puede expresar como

$$D = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ -3 \leq x \leq 3, \quad -\frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2} \leq y \leq \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2}\right\}$$

y la función integrando es $f(x; y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1}$

Como $1 + x^2 + y^2 \geq 1$, entonces $f(x; y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + 1} \leq 1, \quad \forall (x; y) \in D$

Así, el valor máximo absoluto de f ocurre en el punto $(0; 0) \in D$ y su valor es

$$M = f(0; 0) = 1$$

El valor mínimo absoluto de f ocurre en el punto frontera $(3; 0) \in D$ y su valor es

$$m = f(3; 0) = \frac{1}{10}$$

El área de la región D es

$$A(D) = 2\int_{-3}^{3} \frac{1}{3}\sqrt{36 - 4x^2}\, dx = 6\pi u^2$$

Por consiguiente, en virtud de la propiedad 5 de integrales, se tiene

$$\frac{1}{10}(6\pi) \leq \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA \leq 1(6\pi) \Leftrightarrow \frac{3\pi}{5} \leq \iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} dA \leq 6\pi$$

CÁLCULO DE INTEGRALES DOBLES POR MEDIO DE INTEGRALES ITERADAS

CASO I Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua sobre D, donde

$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leq x \leq b, \ \ c \leq y \leq d\}$ es un rectángulo

i) Fijando la variable y en $[c; d]$, la función f depende solo de la variable x, es decir, $f(x; y)$ es una función de variable x continua en $[a; b]$

Así, $A(y) = \displaystyle\int_a^b f(x; y)dx, \ \ c \leq y \leq d$

es el área de la región plana que es la intersección del plano $y = y_0$ con el sólido que está debajo de la superficie $z = f(x; y)$ y por encima de la región D (Fig. 5.7). Por el método de áreas de secciones planas el volumen del sólido es

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \int_a^b f(x; y)dxdy \ \ldots (1)$$

ii) Análogamente, fijando la variable x, $f(x; y)$ es función de y continua en $[c; d]$. Luego,

$$A(x) = \int_c^d f(x;y)dy \ , \quad a \le x \le b$$

es el área de la región plana que resulta al intersecar el plano $x = x_0$ con el sólido. Por tanto, el volumen del sólido es

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \int_c^d f(x;y)dydx \ ...(2)$$

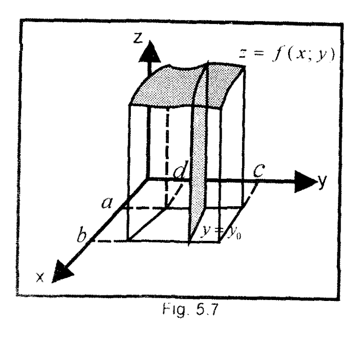


Fig. 5.7

Definición 6.- Las integrales (1) y (2) se llaman integrales iteradas de f y se escriben como

$$\text{i) } I = \iint_D f(x;y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x;y)dxdy$$

$$\text{ii) } I = \iint_D f(x;y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x;y)dydx$$

Con estas integrales la región en la cual se integra la función f es el rectángulo $D = [a;b] \times [c;d]$

Ejemplo 3.- Calcule las siguientes integrales

a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \int_{-4}^{4} (x^2y + xy^2 - x^3)dxdy$ b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{2} (3x^2 + 12x^3y)dydx$

Solución

$$\text{a) } I = \int_{-3}^{3} \int_{-4}^{4} (x^2y + xy^2 - x^3)dxdy = \int_{-3}^{3} \left[\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-4}^{4}$$

$$= \int_{-3}^{3} \left(\frac{128}{3}y\right) dy = 0$$

$$\text{b) } I = \int_0^1 \int_{-1}^{2} (3x^2 + 12x^3y)dydx = \int_0^1 [3x^2y + 6x^3y^2]_{-1}^{2}\, dx$$

$$= \int_0^1 (9x^2 + 18x^3)dx = 7{,}5$$

CASO II Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región cerrada y acotada

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \le x \le b, \ \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\} \text{ (Fig. 5.8)}$$

donde $g_1, g_2: [a; b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo $[a; b]$, tal que $g_1(x) \leq g_2(x), \forall x \in [a; b]$; entonces, la **integral iterada** de f sobre la región D es dada por

$$\iint_D f(x; y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y)dydx$$

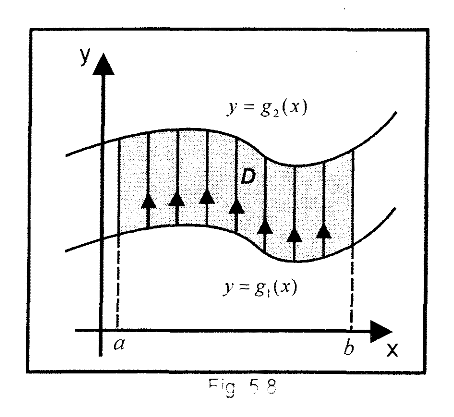


Fig 5.8

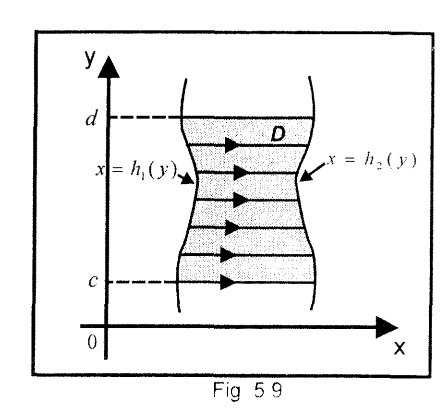


Fig 5.9

CASO III Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región cerrada y acotada

$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ h_1(y) \leq x \leq h_2(y), \ c \leq y \leq d\}$ (Fig. 5.9),

donde $h_1, h_2: [c; d] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en el intervalo $[c; d]$, tal que $h_1(y) \leq h_2(y), \forall y \in [c; d]$; entonces, la **integral iterada** de f sobre la región D es dada por

$$\iint_D f(x; y)dA = \int_c^d \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x; y)dxdy$$

Ejemplo 4.- Calcule $\iint_D \frac{2y-1}{x+1} dA$, donde D es la región limitada por las rectas $x = 0, y = 0$ y $2x - y = 4$

Solución

La región de integración que se muestra en la figura 5.10 corresponde al caso II. Luego,

$$I = \iint_D \frac{2y-1}{x+1} dA = \int_0^2 \int_{2x-4}^0 \frac{2y-1}{x+1} dydx = \int_0^2 \left[\frac{y^2 - y}{x+1}\right]_{2x-4}^0 dx$$

$$I=-\int_0^2 \frac{4x^2-18x+20}{x+1}dx=-\int_0^2\left(4x-22+\frac{42}{x+1}\right)dx=36-42\ln 3$$

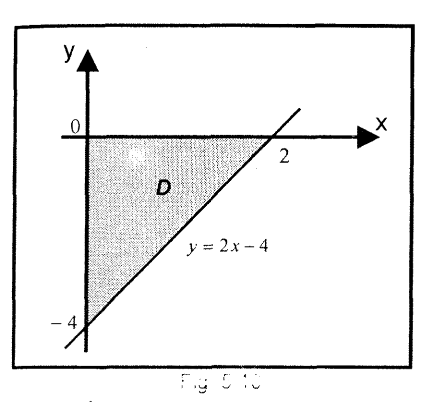


Fig. 5.10

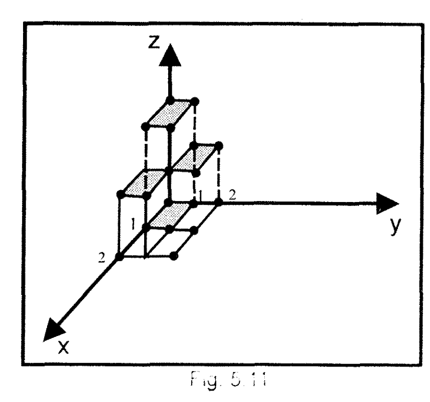


Fig. 5.11

Ejemplo 5.- Calcule $\iint\limits_D (⟦x⟧+⟦y⟧)$, donde

$$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 2\}$$

Solución

La gráfica de la función $f(x;y)=⟦x⟧+⟦y⟧$ sobre la región D se muestra en la Fig. 5.11. Luego, al aplicar la definición de la integral doble se tiene

$$\iint\limits_D (⟦x⟧+⟦y⟧)dA=(1)(1)+(1)(1)+(1)(2)=4$$

Ejemplo 6.- Calcule $\iint\limits_D sen\left(\pi y-\frac{\pi y^3}{3}\right)dA$ en la región limitada por las gráficas de $y=0$, $y=\sqrt{1+x}$ y $y=\sqrt{1-x}$

Solución

La región de integración que se muestra en la figura 5.12 corresponde al caso III. Luego,

$$I=\iint\limits_D sen\left(\pi y-\frac{\pi y^3}{3}\right)dA=\int_0^1\int_{y^2-1}^{1-y^2} sen\left(\pi y-\frac{\pi y^3}{3}\right)dxdy$$

$$=\int_0^1\left[sen\left(\pi y-\frac{\pi y^3}{3}\right)x\right]_{y^2-1}^{1-y^2}dy=\int_0^1 sen\left(\pi y-\frac{\pi y^3}{3}\right)(2-2y^2)dy$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1 sen\Bigg(\underbrace{\pi y-\frac{\pi y^3}{3}}_{u}\Bigg)\Bigg(\underbrace{\pi-\pi y^2}_{du}\Bigg)dy=\frac{2}{\pi}\left[-\cos\left(\pi y-\frac{\pi y^3}{3}\right)\right]_0^1=\frac{3}{\pi}$$

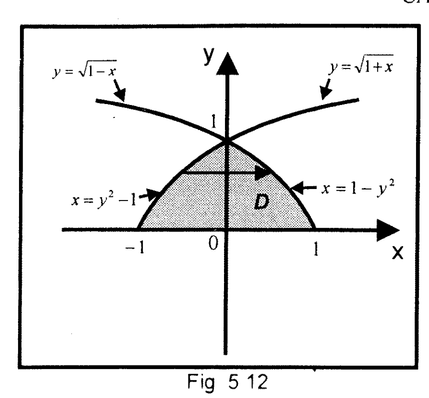


Fig 5 12

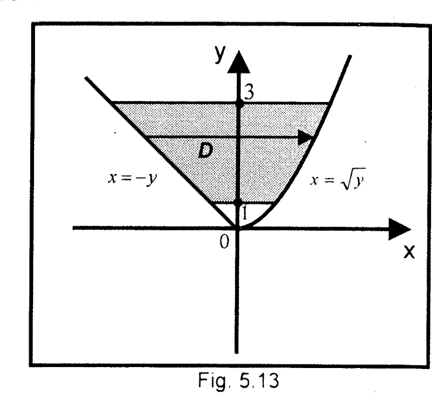


Fig. 5.13

Ejemplo 7.- Halle $\iint_D \frac{xe^y}{y} dA$ en la región limitada por las gráficas de

$$x = \sqrt{y}, \ x = -y, \ y = 1, \ y = 3$$

Solución

La región de integración que se muestra en la Fig. 5.13 corresponde al caso III. Luego,

$$I = \iint_D \frac{xe^y}{y} dA = \int_1^3 \int_{-y}^{\sqrt{y}} \frac{xe^y}{y} dxdy = \int_1^3 \left[\frac{x^2 e^y}{2y}\right]_{-y}^{\sqrt{y}} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (e^y - ye^y)dy = \frac{1}{2}[e^y - (ye^y - e^y)]_1^3 = -\frac{1}{2}(e^3 + e)$$

CAMBIO DE ORDEN DE INTEGRACIÓN

A veces es muy difícil o hasta imposible de evaluar una integral doble iterada empleando un cierto orden de integración. Sin embargo, invirtiendo o cambiando el orden de integración de $dxdy$ a $dydx$ o viceversa, se puede obtener una integral doble iterada de una manera más simple.

Ejemplo 8.- Calcule $\int_0^1 \int_y^1 \tan(x^2)\ dxdy$

Solución

Observe que la integral parcial $\int_y^1 \tan(x^2)\ dx$ no se puede calcular, pues

$\tan(x^2)$ no tiene antiderivada elemental con respecto a x. Sin embargo, como se muestra el la figura 5.14, es posible cambiar el orden de integración y definir la región de integración como

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq x\}$$

Así, se tiene

$$\iint\limits_D \tan(x^2)\ dA = \int_0^1 \int_0^x \tan(x^2)\ dydx = \int_0^1 x\tan(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\ln(\sec(1))$$

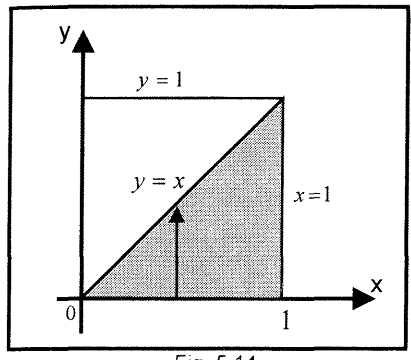


Fig. 5.14

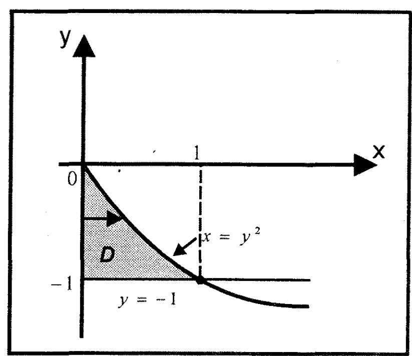


Fig. 5.15

Ejemplo 9.- Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^{-\sqrt{x}} e^{y^3} dydx$

Solución

La integral parcial $\displaystyle\int_{-1}^{-\sqrt{x}} e^{y^3} dy$ no se puede calcular, pues e^{y^3} no tiene antiderivada elemental con respecto a y. Luego, se debe cambiar el orden de integración al definir la región D como

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq y^2,\ \ -1 \leq y \leq 0\}$ (Fig. 5.15)

Por tanto, se tiene

$$\iint\limits_D e^{y^3} dA = \int_{-1}^{0} \int_0^{y^2} e^{y^3} dxdy = \int_{-1}^{0} e^{y^3}.y^2\, dy = \frac{1}{3}\left[e^{y^3}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{3}\left(\frac{e-1}{e}\right)$$

Ejemplo 10.- Halle el valor de la integral

$$I = \int_{-4}^{0} \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} e^{y^2}\, dydx + \int_0^2 \int_{-1+\sqrt{x+1}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} e^{y^2}\, dydx + \int_2^8 \int_{-1+\sqrt{x+1}}^{2} e^{y^2}\, dydx$$

Solución

El orden de integración indicado $dydx$ señala que la región de integración corresponde al caso II, como se ilustra en la Fig. 5.16

Luego, al cambiar el orden de integración, la región D se transforma a la región D'dada por

$$D' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 - y \leq x \leq y^2 + 2y, \ \ 0 \leq y \leq 2\}$$

Por consiguiente, se tiene

$$I = \iint_{D'} e^{y^2} dA = \int_0^2 \int_{y^2-y}^{y^2+2y} e^{y^2} dxdy = \int_0^2 e^{y^2}(3y)dy = \frac{3}{2}(e^4 - 1)$$

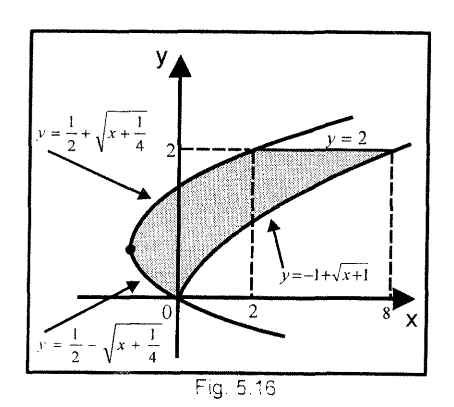


Fig. 5.16

Fig. 5.17

Ejemplo 11.- Calcule $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^4 2^{\sqrt{x^3}} dxdy$

Solución

La integral parcial $\displaystyle\int_{y^2}^4 2^{\sqrt{x^3}} dx$ no se puede calcular, ya que $2^{\sqrt{x^3}}$ no tiene antiderivada elemental con respecto a x. Luego, se debe cambiar el orden de integración al definir la región D como

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 4, \ \ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\} \text{ (Fig. 5.17)}$$

Por consiguiente, se tiene

$$\iint_D 2^{\sqrt{x^3}} dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} 2^{\sqrt{x^3}} dydx = \int_0^4 2^{x^{3/2}} . x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3}\left[\frac{2^{x^{3/2}}}{\ln 2}\right]_0^4 = \frac{170}{\ln 2}$$

EJERCICIOS

1. Calcule las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_1^2 \int_0^{2x} xy^3\, dydx \quad R.\ 42$

b) $\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{x/y}\, dxdy \quad R.\ \frac{1}{2}$

c) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} \sqrt{\frac{y}{x}} dxdy \quad R.\ \frac{1}{5}$

d) $\int_0^1 \int_0^1 |x-y|\, dydx \quad R.\ \frac{1}{3}$

e) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} e^{x+y}\, dydx \quad R.\ \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{3}e^3 + \frac{1}{12}$

f) $\int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{3e^{x^2}} x\ dydx \quad R.\ \frac{3}{2}e^4 - \frac{25}{6}$

g) $\int_0^{\pi/3} \int_{1/2}^{sen\, x} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right) dydx$

h) $\int_2^4 \int_x^{x^2} \frac{1}{x} sech^2\left(\frac{y}{x}\right) dydx$

i) $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\, dxdy$

j) $\int_0^1 \int_x^{2x} \frac{xy^2}{\sqrt{x^3+y^3}} dydx$

k) $\int_0^a \int_x^a \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx \quad R.\ \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a^2$

l) $\int_0^2 \int_0^{3y} x(y^3+1)^{1/2}\, dxdy \quad R.\ 26$

2. Calcule $\iint_D f(x;y)dA$ para los siguientes reglas de $f(x;y)$ y sobre D.

a) $f(x;y) = 2x$; D es la región limitada por $4y = x^2, x - 2y + 4 = 0$ R. 18

b) $f(x;y) = x\, sen\,(xy);\ D = \left\{(x;y)\ /\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

c) $f(x;y) = (1-x^4)^{-1/2};\ D = \left\{(x;y)\ /\ 0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0 \le y \le x\right\}\quad R. \frac{\pi}{12}$

d) $f(x;y) = \frac{sen\, x}{4 - sen^2 y};\ D = \left\{(x;y)\ /\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le x\right\}\quad R. \frac{1}{2}\ln 3$

e) $f(x;y) = x,\ D = \left\{(x;y)\ /\ 0 \le x \le \sqrt{4-y^2},\ 0 \le y \le 2\right\}\quad R. \frac{16}{3}$

f) $f(x;y) = \sec y,\ D = \left\{(x;y)\ /\ 0 \le x \le 1,\ \arctan x \le y \le \frac{\pi}{4}\right\}$

g) $f(x;y) = \frac{2y-1}{x^2-1};\ D$ limitado por $y = 4 - x^2, y = 0\quad R.\ 4\arctan 2 - \frac{80}{3}$

3. Calcule las siguientes integrales cambiando el orden de integración.

a) $\int_0^2 \int_{2y}^4 e^{x^2}\, dxdy \quad R. \frac{1}{4}(e^{16}-1)$ b) $\int_0^1 \int_y^1 sen\, x^2\, dxdy \quad R. \frac{1}{2}(1-\cos 1)$

c) $\int_0^1 \int_0^{\arccos x} e^{sen\, y}\, dydx \quad R.\ e-1$

d) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} e^{x/y}\, dydx \quad R.\ \frac{e}{2}-1$ e) $\int_0^1 \int_x^1 x^2\sqrt{1+y^4}\, dydx$

f) $\int_0^{\pi/2} \int_0^y [\cos(2y)]\sqrt{1-k^2 sen^2 x}\, dxdy, 0<k^2<1 \quad R.\ \frac{1}{3k^2}\left[(1-k^2)^{3/2}-1\right]$

g) $\int_{-1}^0 \int_{\arccos x}^2 e^y\, dydx \quad R.\ \frac{1}{2}\left(e^{\pi}+e^{\pi/2}\right)-e^{\pi}$

h) $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 e^{\cos(\pi x^4)}\, sen\,(\pi x^4) dxdy \quad R.\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e-1}{e}\right)$

i) $\int_0^1 \int_{arcsen\, x}^{\pi/2} e^{\cos y}\, dydx \quad R.\ e-1$

4. En los siguientes ejercicios, se da una región D y una función $f(x;y)$.

Dibuje y calcule $\iint_D f(x;y)dA$

a) D es la región encerrada por $y=x^2,\ y=-x^2+1;\ f(x;y)=x\sqrt{y}$

b) D es el interior de las intersecciones de las elipses

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1,\ x^2+\frac{y^2}{4}=1;\ f(x;y)=x+y+1$$

c) D es el interior de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ f(x;y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \quad R.\ \frac{2}{3}\pi abc$$

d) D es el interior del triángulo de vértices $(-7;-6),(5;3),(0;0)$

$$f(x;y)=e^{x+y} \qquad R. -\frac{3}{7}e^{-13}+\frac{6}{13}e^{-6}-\frac{47}{21}e^{8}+\frac{86}{39}$$

e) D es la región limitada por $y=\sqrt{x}, y=0, x=4$

$$f(x;y)=\frac{y}{x^2+1}$$

f) $f(x;y)=\big||x|-|y|-1\big|$ donde la región $D=D_1\cup D_2$, siendo

$D_1 = [0;3] \times [-2;2]$ y D_2 el triángulo formado por las rectas $x = 0$, $y = 2, y = 8 - 2x$ $\qquad R.\ 142/3$

g) D es la región limitada por las parábolas $y = x^2,\ \ x = y^2$
$f(x;y) = x^n y^m$ donde n, m son números naturales ≥ 1

$$R.\ \frac{-3m+5}{(m+1)(2m+n+3)(2n+m+1)}$$

5.- Calcule $\iint_D f(x;y)dA$ para las siguientes elecciones de f y regiones D.

a) $f(x;y) = 2x - y$; D es la región sobre $y = |x-1|$ y debajo de $y = 4 - |x|$ $\qquad$ R. $-15/2$

b) $f(x;y) = x\cos(x+y)$; D es el triángulo cuyos vértices son $(0;0), (\pi;0)$ y $(\pi;\pi)$ $\qquad$ R. $-3\pi/2$

c) $f(x;y) = e^{x+y}$; D es la región definida por $|x| + |y| \leq 1$ $\quad R.\ e - \dfrac{1}{e}$

d) $f(x;y) = x^2 + y$; D es el triángulo cuyos vértices son

$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), (1;2), (1;-1)$ $\qquad R.\ \dfrac{63}{32}$

e) $f(x;y) = x + y$; D es la región acotada por el cuadrado con vértices

$(1;1), (1;-1), (-1;-1), (-1;1)$ y por el cuadrado con vértices $(2;2), (2;-2), (-2;-2), (-2;2)$

$$\text{f) } f(x;y) = \begin{cases} |y - sen\, x|, si -\pi \leq x \leq \pi \ \wedge\ -2 \leq y2 \\ x + y \qquad , si\ x \leq 5 + y^2 \\ 1 \qquad , si\ x > 5 + y^2 \end{cases}$$

siendo la región $D = [-\pi;6] \times [-2;2]$ $\qquad R.\ 61 + \left(\frac{73}{15}\right) + 8\pi - \pi^2$

6.- Sea f una función continua en las regiones

$D_1 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + y^2 \leq 25\}$, $D_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + y^2 \leq 4\}$

$D_3 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$, $D_4 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

$D_5 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

y sea C_i frontera de D_i, para $i = 1,2,\dots,5$
Sea I_i la integral doble de f sobre D_i, $i = 1,2,\dots,5$ y

$I_1 = 10,\ I_2 = 3,\ I_3 = 1,\ I_4 = 6,\ I_5 = 2$

Encuentre la integral doble de f en la región limitada por las curvas dadas, en cada caso.

a) C_1 y C_2 R. 7 b) C_1, C_3 y C_4

c) C_2 y C_4 R. -3 d) C_1, C_2 y C_3

e) C_2 y C_5 R. 1 f) C_1, C_3 y C_5

7.- Dada la suma de integrales

$$\int_{-6}^{\frac{2}{3}} \int_{\frac{y^2}{4}+y-1}^{-\frac{y}{3}} f(x;y)\,dxdy + \int_{-\frac{2}{9}}^{2} \int_{-3x}^{\frac{2}{3}} f(x;y)\,dydx + \int_{2/3}^{2} \int_{\frac{y^2}{4}+y-1}^{2} f(x;y)\,dxdy$$

Halle la integral doble que sea igual a la suma propuesta.

8.- Represente en una sola integral iterada la siguiente suma de integrales

$$\int_{-9}^{-1} \int_{-2}^{\frac{y+5}{2}} x\,dxdy + \int_{e^{-2}}^{e^2} \int_{\ln y}^{2} x\,dxdy + \int_{-1}^{e^{-2}} \int_{-2}^{2} dxdy$$

9.- Dada $I = \displaystyle\int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{0} f(x;y)\,dxdy + \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x;y)dydx$

a) Represente I en una sola integral

b) Si $f(x;y) = x$, halle el valor de I. R. 0

5.2 CÁLCULO DE VOLUMENES DE SÓLIDOS Y ÁREAS DE REGIONES PLANAS POR INTEGRACIÓN DOBLE

CASO 1: Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en la región cerrada D, y $f(x;y) \geq 0, \forall (x;y) \in D$. Entonces el volumen del sólido S limitado superiormente por la superficie $z = f(x;y)$ e inferiormente por la región D (Fig. 5.18) está dado por

$$V(S) = \iint_D f(x;y)dA$$

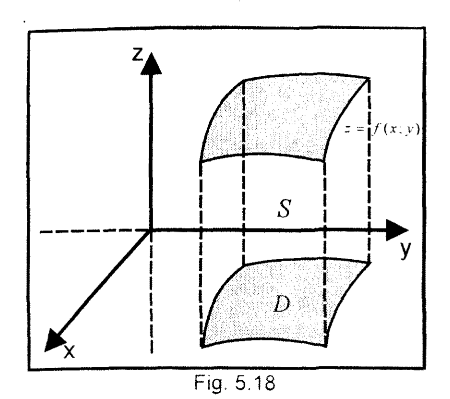


Fig. 5.18

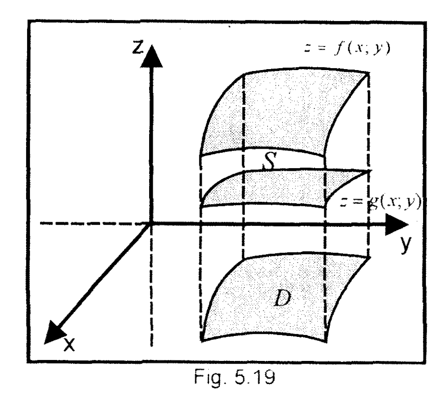


Fig. 5.19

CASO 2: Si $f, g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en la región cerrada D, tal que $f(x;y) \geq g(x;y), \forall(x;y) \in D$, entonces el volumen del sólido S limitado superiormente por la superficie $z = f(x;y)$ e inferiormente por la superficie $z = g(x;y)$ es dado por

$$V(S) = \iint_D [f(x;y) - g(x;y)]dA$$

ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región cerrada D, tal que $f(x;y) = 1, \forall(x;y) \in D$, entonces el área de la región D es dada por

$$A(D) = \iint_D dA$$

Ejemplo 12.- Halle el volumen del sólido limitado por el plano XY, el plano $x + y + z = 2$ y el cilíndro parabólico $y = x^2$

Solución

Sea S el sólido limitado superiormente por el plano $z = 2 - x - y$ e inferiormente por la región cerrada

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, -2 \leq x \leq 1, \;\; x^2 \leq y \leq 2 - x\} \;\; \text{(Fig. 5.20)}$$

Luego, el volumen del sólido es

$$V = \iint_D (2 - x - y)dA = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} (2 - x - y)\, dydx = \frac{81}{20}u^3$$

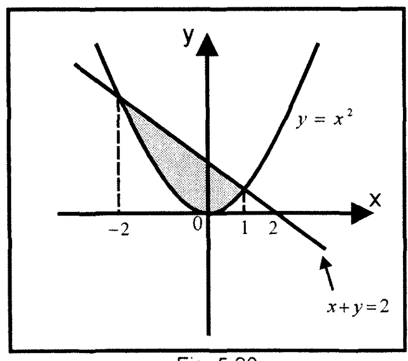


Fig. 5.20

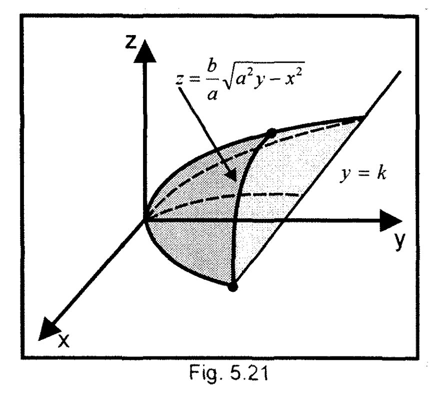


Fig. 5.21

Ejemplo 13.- Calcule el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=y$, y el plano $y = k$ $(k > 0)$

Solución

La región de integración sobre el plano XY es

$$D=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, -a\sqrt{k}\le x\le a\sqrt{k},\ \frac{x^2}{a^2}\le y\le k\right\} \quad \text{(Fig.5.21)}$$

Luego, el volumen del sólido es

$$V(S)=2\int_{-a\sqrt{k}}^{a\sqrt{k}}\int_{\frac{x^2}{a^2}}^{k}\frac{b}{a}\sqrt{a^2y-x^2}\,dydx=\frac{\pi abk^2}{2}.u^3$$

Ejemplo 14.- Encuentre el volumen del sólido que se encuentra debajo del plano $x + z = 0$, por encima del plano $z = 0$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 9$

Solución

En el plano XY los límites de integración de la región D son la recta $x = 0$, y las semicircunferencias $y=-\sqrt{9-x^2}$ y $y=\sqrt{9-x^2}$

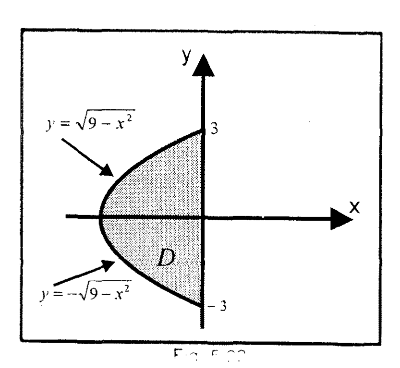


Fig. 5.22

Por tanto, el volumen del sólido que se encuentra debajo del plano $z = -x$ y por encima del plano $z = 0$ es

$$V=\iint_D f(x;y)dA=\iint_D(-x)dA$$

$$=2\int_{-3}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}(-x)\,dydx=18u^3$$

Ejemplo 15.- Halle el volumen del sólido comprendido entre los cilindros $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + z^2 = 16$

Solución

Como se muestra en la Fig. 5.23(a), el sólido en el primer octante se encuentra por debajo del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ y sobre la región D en el plano XY limitada por los ejes coordenados y la curva $y = \sqrt{16 - x^2}$ (Fig. 5.23b).

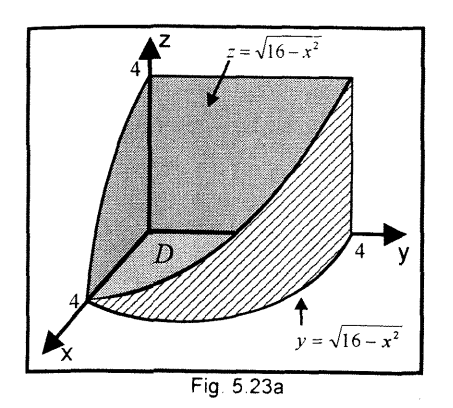


Fig. 5.23a

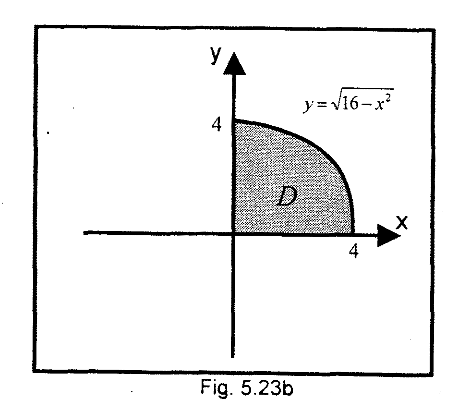


Fig. 5.23b

Luego, el volumen del sólido limitado superiormente por $z = \sqrt{16 - x^2}$ es

$$V(S) = 8 \iint_D f(x; y) dA = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \sqrt{16 - x^2}\, dy dx = \frac{1024}{3} u^3$$

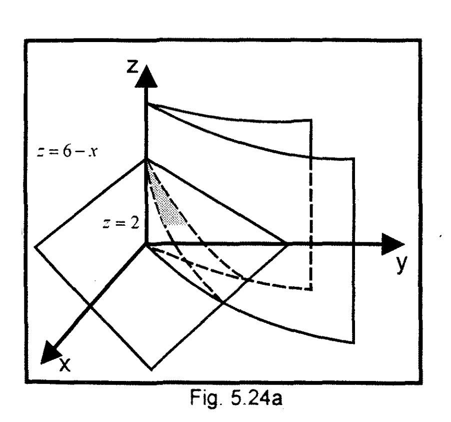


Fig. 5.24a

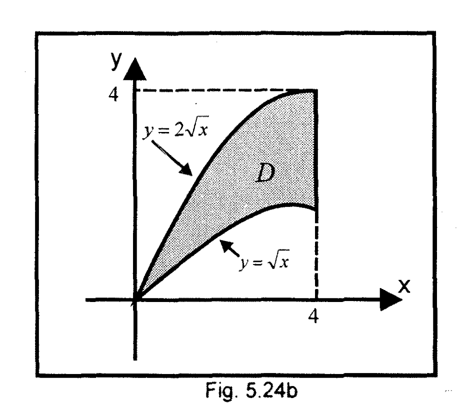


Fig. 5.24b

Ejemplo 16.- Halle el volumen del sólido limitado por las superficies
$y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad x + z = 6, \quad z = 2$

Solución

El sólido S limitado por las superficies dadas se muestra en la Fig. 5.24a y la proyección de la cota inferior del sólido sobre el plano XY es la región D que se muestra en la Fig. 5.24b y su representación analítica es

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 4, \ \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$$

Por tanto, el volumen del sólido S es

$$V(S) = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} [(6-x)-2]\,dydx = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (4-x)\,dydx = \frac{128}{15}u^3$$

Ejemplo 17.- Determine el volumen del sólido limitado por las superficies
$y = 0, \ y = 4, \ x = 0, \ x = y, \ z = \sqrt{y}, \ z = 2\sqrt{y}$

Solución

El sólido S limitado por las superficies dadas se muestra en la Fig. 5.25a y la proyección de la cota inferior del sólido sobre el plano XY, es la región D que se muestra en la Fig. 5.25b y su representación analítica es

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / 0 \leq x \leq 4, \ x \leq y \leq 4\}$$

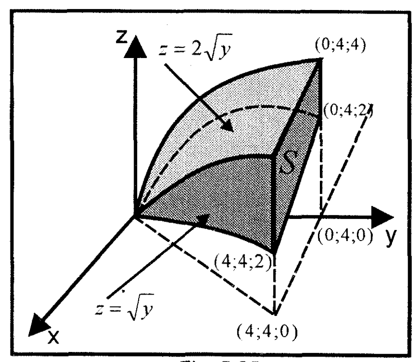


Fig 5 25a

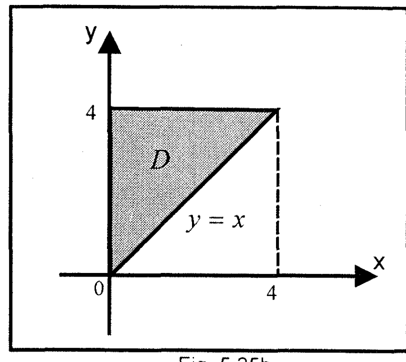


Fig 5 25b

Luego, el volumen del sólido S es

$$V(S) = \iint_D [2\sqrt{y} - \sqrt{y}]dA = \int_0^4 \int_x^4 y^{1/2}\,dydx = \frac{64}{5}u^3$$

Ejemplo 18.- Calcule el área de la región R limitada por las gráficas de

$$y = -\frac{3x}{2}, \ y = 4 - \frac{x^2}{4}, \ y = 1 - x^2, \ y = x^2 - 1 \text{ y } y \geq 0$$

Solución

La región R se muestra en la Fig. 5.26

Al usar la integral doble para calcular el área de la región R, se tiene

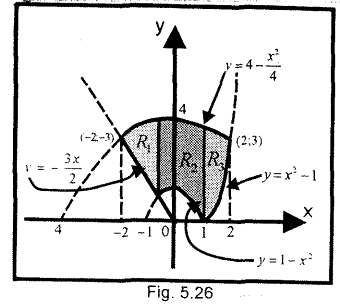


Fig. 5.26

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3)$$

$$= \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA + \iint_{R_3} dA$$

$$= \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \int_{-\frac{3x}{2}}^{4-\frac{x^2}{4}} dydx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \int_{1-x^2}^{4-\frac{x^2}{4}} dydx + \int_{1}^{2} \int_{x^2-1}^{4-\frac{x^2}{4}} dydx$$

$$= \frac{243}{96} + \frac{153}{32} + \frac{25}{12} = \frac{902}{96} u^2$$

Ejemplo 19.- Dada la suma de integrales dobles

$$I = \int_2^3 \int_1^{\frac{y}{2}} \cos((x+y)^3)\, dxdy + \int_3^4 \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} \cos((x+y)^3)\, dxdy + \int_4^6 \int_{y/3}^{2} \cos((x+y)^3)\, dxdy$$

a) Cambie el orden de integración y exprese I en una sola integral

b) Calcule el área de la región de integración D

Solución

La región de integración se muestra en la Fig. 5.27

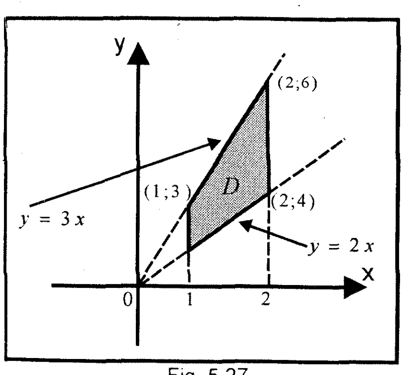


Fig. 5.27

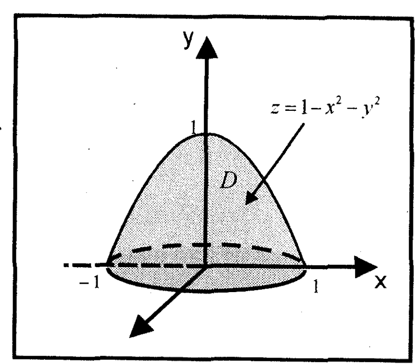
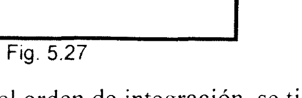


Fig. 5.28



a) Al cambiar el orden de integración, se tiene

$$I = \int_1^2 \int_{2x}^{3x} \cos((x+y)^3)\, dydx$$

b) El área de la región plana D es

$$A(D) = \int_{1}^{2}\int_{2x}^{3x} dydx = \frac{3}{2}u^2$$

Ejemplo 20.- El cono de la nariz de un determinado cohete tiene la forma de la región limitada por el plano XY y el paraboloide $x^2 + y^2 + z = 1$. Halle el volumen del cono de la nariz del cohete.

Solución

El cono de la nariz del cohete está limitado superiormente por el paraboloide elíptico $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el disco

$D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -1 \leq x \leq 1,\quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\right\}$ (Fig. 5.28)

Por tanto, el volumen del cono de la nariz del cohete es

$$V = \iint_D f(x;y)dA = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dydx = \frac{\pi}{2}u^3$$

EJERCICIOS

1.- Calcule el área de la región limitada por las curvas dadas.

a) $y = |x|,\ \ 4y = 4x^2 + 1$ R. 1/12

b) $D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ \ x^2 \leq y \leq x + \cos(2x)\right\}$ $R. \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi^3}{192}$

c) $y = x^3 - 2x,\ \ y = 6x - x^3$ R. 16

d) $y^2 = 9 + x,\ \ y^2 = 9 - 3x$

e) $y = x^2 - 12,\ \ y = |x|,\ \ y = 6 - x^2$

2.- Determine el volumen del sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $2x + y + z - 6 = 0$ R. $18u^3$

3.- Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ e inferiormente por el plano XY. R. $4\sqrt{2}\pi u^3$

4.- Calcule el volumen del sólido limitado por la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ para $x \geq 0,\ \ y \geq 0$, los planos coordenados y el plano $2y + 2z - x = 8$

R. $(32 + 16\pi)u^3$

5.- Halle el volumen del sólido en el primer octante limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos coordenados. R. $2\pi u^3$

6.- Calcule el volumen del sólido en el primer octante acotado por los cilindros

$x^2 + y^2 = 4, \; x^2 + z^2 = 4$ R. $\dfrac{16}{3}u^3$

7.- Calcule el volumen del sólido en el primer octante acotado por las superficies

$x + z^2 = 1, \; x = y, \;$ y $\; x = y^2$ R. $\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{4}{15}$

8.- Halle el volumen de la región limitada por el cilindro $x^2 + z = 1$ y por los planos $x + y = 1, \; y = 0$ y $z = 0$ R. $4/3u^2$

9.- El plano XY y la superficie $y^2 = 16 - 4z$ cortan al cilindro $x^2 + y^2 = 4x$ Halle el volumen de la región limitada por estas superficies. R. $15\pi u^3$

10.- Determine el volumen de la región sobre el plano XY dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y debajo del paraboloide $2z + x^2 + y^2 = 16$ R. $28\pi u^3$

11.- Determine el volumen de la región localizada en el primer octante bajo la superficie $z = xy$ y sobre el plano XY que se encuentra dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y a la derecha de la recta $x + y = 1$ R. $1/12 \, u^3$

12.- Calcule el volumen del sólido que se encuentra debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y sobre el cuadrado limitado por las rectas $x = \pm 1, \; y = \pm 1$

R. $8/3 \, u^3$

13.- Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por la gráfica de $z = 1 - x^2 - 4y^2$ e inferiormente por la gráfica de $x^2 + 4y^2 - 4z = 1$

R. $5\pi/16 \, u^3$

14.- Halle el volumen del sólido en el primer octante limitado por la superficie $z = xy$ y el plano $x + y = 1$ R. $1/24 \, u^3$

15.- Halle el volumen de un sólido limitado superiormente por $y^2 = a^2 - az$ e inferiormente por $z = 0$ y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

R. $\dfrac{3\pi a^3}{4}u^3$

16.- Un sólido está limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 4ax$, $x = 3a$ y situado en el interior de $y^2 = ax$. Halle su volumen R. $(6\pi + 9\sqrt{3})a^3u^3$

17.- Halle el volumen del sólido limitado superiormente por $z = 2x + a$ e inferiormente por $z = 0$ y lateralmente por $x^2 + y^2 = 2ax$ R. $3\pi a^3 u^3$

18.- Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por $4z = 16 - 4x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = 0$ y lateralmente por $x^2 + y^2 = 2x$ R. $(43/16)\pi u^3$

19.- Halle el volumen del espacio comprendido debajo de $z = 4 - y^2$ arriba de $z = 0$ y dentro de las superficies cilíndricas $y^2 - 2x = 0$, $y^2 = 8 - 2x$
R. $512/15\ u^3$

20.- Halle el volumen del sólido limitado por arriba mediante el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ y por debajo por el plano $z = 2 - 2y$ R. $3\pi/2\ u^3$

21.- Calcule el volumen del cuerpo limitado por la superficie cilíndrica $z = e^{-x^2}$ y los planos $y = 0$, $y = x$, y $x = 1$ $R.\ \dfrac{e-1}{2e}u^3$

22.- a) Grafique el dominio de integración de la expresión

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{\frac{y^2+3}{2}} f(x;y)\,dxdy + \int_0^{3/4} \int_{-x}^{0} f(x;y)\,dydx + \int_{3/4}^{1} \int_{-x}^{\sqrt{4x-3}} f(x;y)\,dydx$$

b) Halle el área del dominio de integración R. $5/3\ u^2$

5.3 INTEGRALES DOBLES MEDIANTE COORDENADAS POLARES

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región acotada por las rectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y por los círculos $r = a$ y $r = b$, como se ilustra en la (Fig. 5.29).

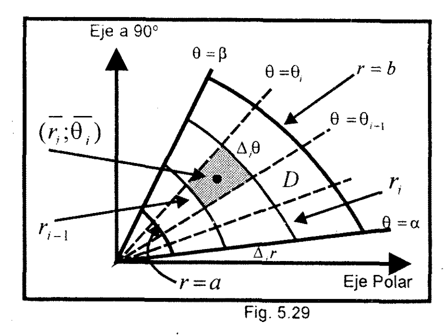


Fig. 5.29

Una partición P de la región D se obtiene trazando rectas a través del polo y círculos con centros en el polo. Así, se obtiene una red de n regiones llamados rectángulos curveados. La norma de la partición denotado por $\|P\|$ es la longitud de la diagonal más grande de los

rectángulos curveados. El área del i-ésimo rectángulo curveado es igual a la diferencia de las áreas de los sectores circulares, esto es,

$$\Delta_i A = \frac{1}{2}r_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_i - \theta_{i-1})$$
$$= \frac{1}{2}(r_i - r_{i-1})((r_i + r_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1})$$

Al definir $\overline{r_i} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})$, $\Delta_i r = r_i - r_{i-1}$, $\Delta_i\theta = \theta_i - \theta_{i-1}$, se tiene

$$\Delta_i A = \overline{r_i}\, \Delta_i r\, \Delta\theta_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en la región D. Si $(\overline{r_i}; \overline{\theta_i})$ es un punto en la i-ésima sub-región con $\theta_{i-1} \leq \overline{\theta_i} \leq \theta_i$, entonces la suma Riemann de f asociada a la partición P_D de la región D es

$$S_R = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}; \overline{\theta_i})\Delta_i A = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}; \overline{\theta_i})\overline{r_i}\Delta_i r \Delta_i \theta$$

Por tanto, la integral doble de f sobre la región D es

$$\iint_D f(r;\theta)dA = \lim_{\|P_D\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{r_i}; \overline{\theta_i})\overline{r_i}\Delta_i r \Delta_i \theta = \iint_D f(r;\theta) r dr d\theta$$

Observación 4.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua en la región cerrada D contenido en el plano coordenado polar, y $f(r;\theta) \geq 0, \forall (r;\theta) \in D$. Entonces, el volumen del sólido S limitado superiormente por la superficie $z = f(r;\theta)$ e inferiormente por la región D está dado por

$$\boxed{V(S) = \iint_D f(r;\theta) r dr d\theta}$$

INTEGRALES ITERADAS EN COORDENADAS POLARES

CASO I. Si $f: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región polar

$$D^* = \{(r;\theta) \,/\, \alpha \leq \theta \leq \beta, \;\; \phi_1(\theta) \leq r \leq \phi_2(\theta)\}$$

contenido en el plano polar (Fig. 5.30), donde $\phi_1, \phi_2: [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en $[\alpha;\beta]$, tal que $\phi_1(\theta) \leq \phi_2(\theta)$, $\forall \theta \in [\alpha;\beta]$; entonces, la integral iterada de f sobre la región D^* es dada por

$$\iint_{D^*} f(r;\theta)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(r;\theta) r dr d\theta$$

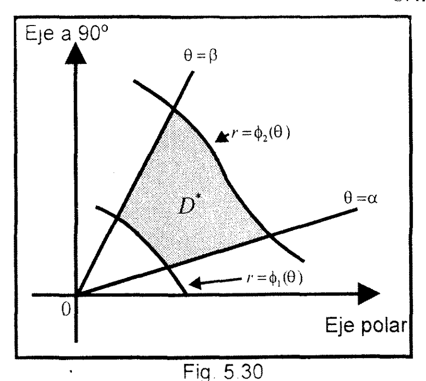


Fig. 5.30

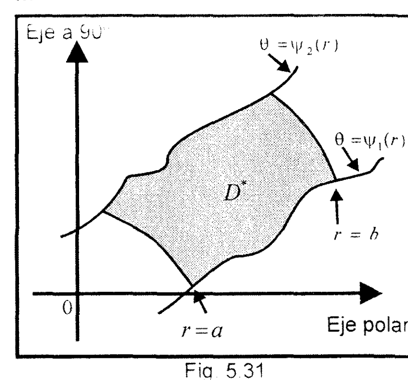


Fig. 5.31

CASO II. Si $f: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función continua en la región polar

$$D^* = \{(r;\theta)\ /\ a \le r \le b,\ \ \psi_1(r) \le \theta \le \psi_2(r)\}\ \text{(Fig. 5.31)}$$

donde $\psi_1, \psi_2: [a;b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en $[a;b]$, tal que $\psi_1(r) \le \psi_2(r),\ \ \forall r \in [a;b]$; entonces, la integral iterada de f sobre la región D^* es dada por

$$\iint_{D^*} f(r;\theta)dA = \int_a^b \iint_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} f(r;\theta)rd\theta dr$$

Ejemplo 21.- Calcule el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e inferiormente por la región limitada por la gráfica de la circunferencia $r = 2\cos\theta$

Solución

En coordenadas polares, la región de integración en el plano polar es

$$D = \left\{(r;\theta)\ /\ 0 \le r \le 2\cos\theta,\ \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}\quad \text{(Fig.5.32a)}$$

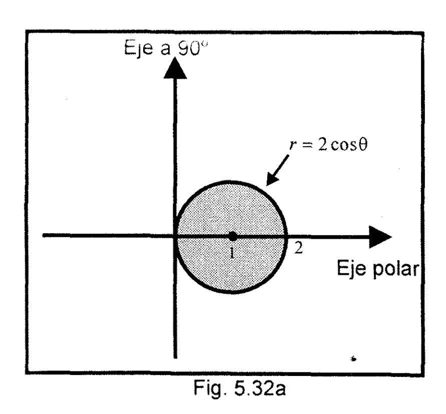


Fig. 5.32a

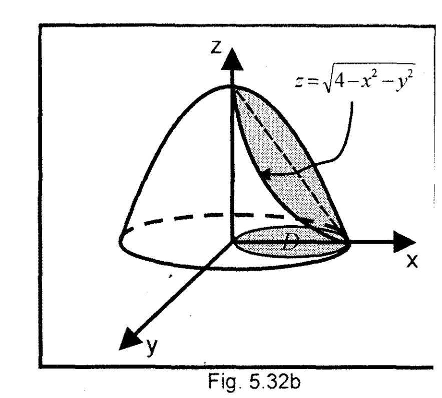


Fig. 5.32b

Además, para $x = r\cos\theta$ y $y = r\,sen\,\theta$, la ecuación de la superficie es

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} = \sqrt{4 - r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta} = \sqrt{4 - r^2}$$

Por tanto, el volumen V del sólido está dado por

$$V = \iint\limits_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4 - r^2}\,rdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} (4 - r^2)^{1/2}rdrd\theta = 2\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{3/2}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}(1 - sen^3\theta)d\theta = \frac{16}{3}\left[\theta + \cos\theta - \frac{1}{3}cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}\right)u^3$$

Ejemplo 22.- Calcule el volumen del sólido S que está limitado inferiormente por el plano XY, superiormente por la superficie $x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$

Solución

Para simplificar el cálculo de la integral, se convierte la ecuación cartesiana del cilindro a coordenadas polares. Así se tiene:

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\,sen\,\theta)^2 - 4rsen\,\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 4r\,sen\,\theta = 0 \Leftrightarrow r(r - 4\,sen\,\theta) = 0 \Leftrightarrow r = 4\,sen\,\theta$$

Luego, la región de intersección en el plano polar está dada por

$D = \{(r;\theta)\ \ 0 \le r \le 4\,sen\,\theta,\ \ 0 \le \theta \le \pi\}$ (Fig. 5.33)

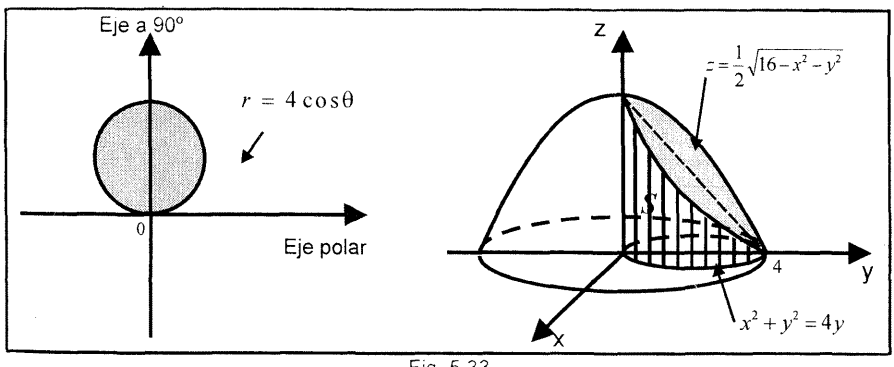


Fig 5.33

Por consiguiente, el volumen V del sólido está dado por

$$V = \iint_D f(x;y)dA = \iint_D \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2 - y^2}dA = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{4\,sen\,\theta} \sqrt{16 - r^2}\,rdrd\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[-\frac{1}{3}(16 - r^2)^{3/2}\right]_0^{4\,sen\,\theta} = \frac{32}{3}\int_0^{\pi}(1 - |cos^3\theta|)d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\pi}d\theta - \frac{32}{3}\int_0^{\pi}|cos^3\theta|d\theta = \frac{32\pi}{3} - \frac{32}{3}\left[\int_0^{\pi/2}cos^3\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}-cos^3\theta\,d\theta\right]$$

$$= \frac{32\pi}{3} - \frac{32}{3}\left[\left[sen\,\theta - \frac{sen^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} - \left[sen\,\theta - \frac{sen^3\theta}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{32\pi}{3} - \frac{32}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}(3\pi - 4)u^3$$

5.4 JACOBIANO DE UNA FUNCIÓN DE n VARIABLES

Definición 7.- Sea $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D \to\subset \mathbb{R}^2$ una función (transformación) continuamente diferenciable dada por

$T(u;v) = (x;y)$, donde $x = x(u;v)$ y $y = y(u;v)$ (Fig. 5.34)

El Jacobiano de la transformación T está dado por

$$J(u;v) = \frac{\partial(x;y)}{\partial(u;v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

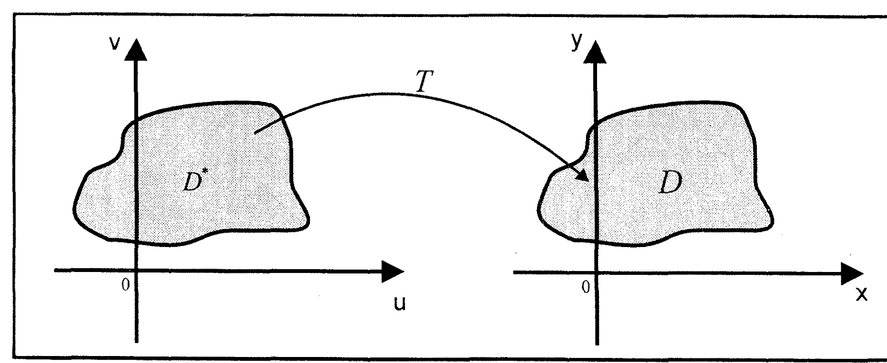


Fig 5 34

Ejemplo 23.- La función $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas está dada por

$$T(r;\theta) = (x;y), \text{ donde } x = r\cos\theta, \quad y = r\,sen\,\theta$$

Entonces el Jacobiano de T es

$$J(r;\theta) = \frac{\partial(x;y)}{\partial(r;\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,sen\,\theta \\ sen\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

En general, se tiene la siguiente definición.

Definición 8.- Sea $\phi: D^* \subset \mathbb{R}^n \to D \subset \mathbb{R}^n$ una función (transformación) continuamente diferenciable y uno a uno definida por

$$\phi(y_1;\dots;y_n) = (\phi_1(y_1;\dots;y_n);\dots;\phi_n(y_1;\dots;y_n))$$

donde las funciones coordenadas son dadas por

$$x_1 = \phi_1(y_1;\dots;y_n), \quad x_2 = \phi_2(y_1;\dots;y_n)\dots, x_n = \phi_n(y_1;\dots;y_n)$$

El Jacobiano de la transformación ϕ está dado por

$$J(y_1;\dots;y_n) = \frac{\partial(x_1;\dots;x_n)}{\partial(y_1;\dots;y_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 24.- Sea $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación definida por

$$\phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4), \text{ donde}$$

$$x_1 = 3y_1 - y_2, \quad x_2 = 2y_2, \quad x_3 = y_3 - y_4, \quad x_4 = y_4$$

Entonces, el Jacobiano de ϕ es

$$J(y_1;\dots;y_4) = \frac{\partial(x_1;x_2;x_3;x_4)}{\partial(y_1;y_2;y_3;y_4)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_3} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_4} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_3} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_4} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_3} & \dfrac{\partial x_3}{\partial y_4} \\ \dfrac{\partial x_4}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_4}{\partial y_2} & \dfrac{\partial x_4}{\partial y_3} & \dfrac{\partial x_4}{\partial y_4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES

Teorema 1.- Sea $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 (continua con derivadas parciales de primer orden continuas) definida por
$T(u;v) = (x;y) = (x(u;v); y(u;v))$ (ver Fig. 5.35)
para todo $(u;v) \in D^*$ y $\forall (x;y) \in D$, donde D^* y D son regiones cerradas en $\mathbb{R}^2$ con Jacobiano no nulo, esto es,

$$J(u;v) = \frac{\partial(x;y)}{\partial(u;v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función integrable en D, entonces la función $f \circ T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es integrable sobre el conjunto D^* y

$$\iint_D f(x;y)dA = \iint_{T(D^*)} f(x;y)dA = \iint_{D^*} f(x(u;v); y(u;v))\,|J(u;v)|dudv$$

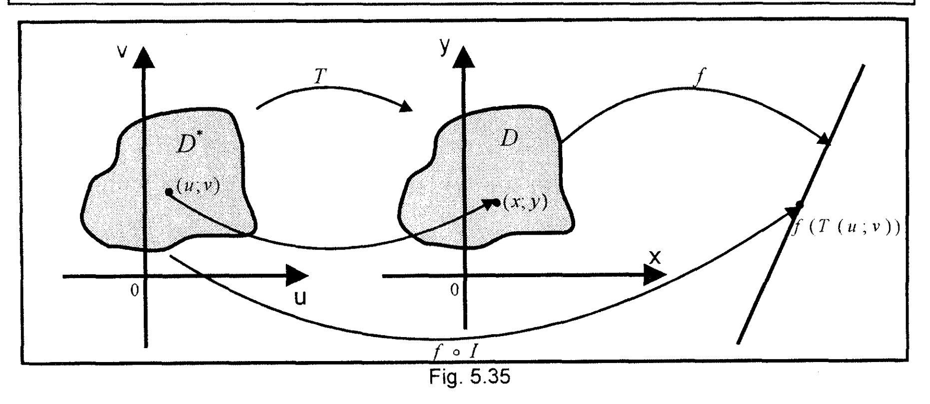


Fig. 5.35

Para el caso particular de la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$, se tiene

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta\,; r\,sen\,\theta)rdrd\theta$$

Ejemplo 25.- Calcule $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$, donde D es el triángulo limitado por la recta $x + y = 2$ y los ejes coordenados.

Solución

Sea la transformación

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{v-u}{2} \\ y = \dfrac{u+v}{2} \end{cases}$$

Para los límites de la región D (Fig. 5.36), se tiene

Si $x = \dfrac{v-u}{2} = 0$ (lado del triángulo sobre el eje Y), entonces $v = u$

Si $x + y = \dfrac{v-u}{2} + \dfrac{u+v}{2} = 2$ (lado del triángulo sobre la recta $x + y = 2$). $v = 2$

Luego, la transformación $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to D \subset \mathbb{R}^2$ está dada por

$$T(u; v) = \left(\frac{v-u}{2}; \frac{u+v}{2}\right)$$

donde la región de integración en el plano UV es

$$D^* = \{(u; v) \ / \ -v \le u \le v, \ \ 0 \le v \le 2\} \text{ (Fig. 5.36)}$$

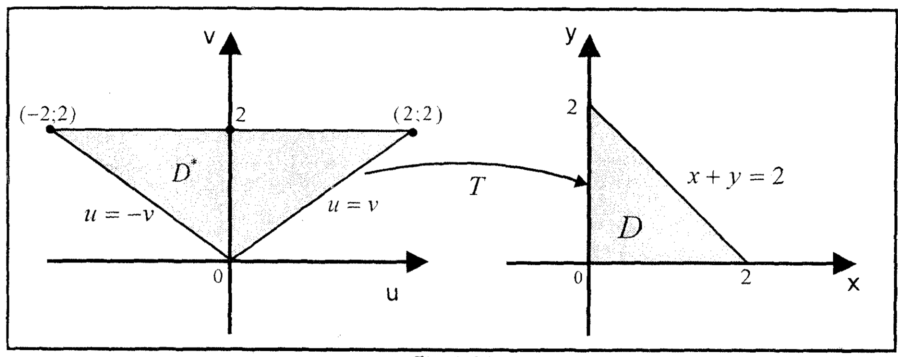


Fig. 5.36

El Jacobiano de la transformación T es $J(u; v) = \dfrac{\partial(x; y)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}.$

Por tanto,

$$\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy = \iint\limits_{D^*} e^{u/v} \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2}\int_0^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} dudv = e - e^{-1}$$

Ejemplo 26.- Halle el área de la región limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$, $x - xy = 1$, $x - xy = 3$.

Solución

Sea la transformación

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x - yx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + v \\ y = \dfrac{u}{u+v} \end{cases}$$

Luego, la transformación $T: D^* \longrightarrow D$ está definida por

$$T(u; v) = \left(u + v; \frac{u}{u+v}\right)$$

En coordenadas u y v, la región de integración en el plano UV está dada por $D^* = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 1 \leq v \leq 3, \ 1 \leq u \leq 3\}$ (Fig. 5.37)

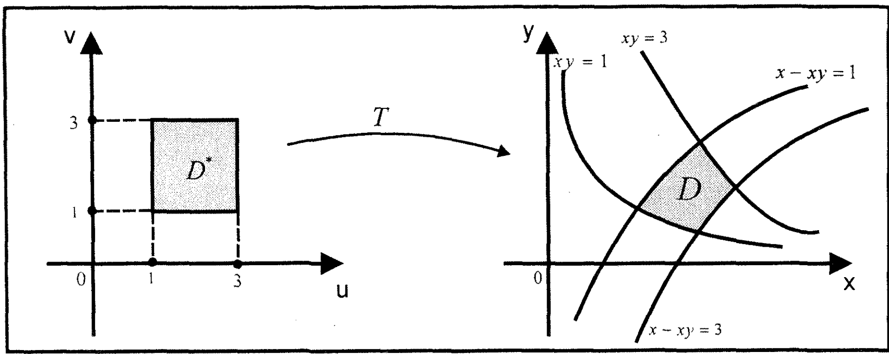


Fig 5.37

El Jacobiano de la transformación es

$$J(u; v) = \frac{\partial(x; y)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{v}{(u+v)^2} & \dfrac{-u}{(u+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{u+v}$$

Por tanto,

$$A(D) = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D^*} |J| dudv = \int_1^3 \int_1^3 \frac{1}{u+v} dudv$$

$$= \int_1^3 [\ln(3+v) - \ln(1+v)] dv = (6 \ \ln 6 - 14 \ \ln 2)u^2$$

Ejemplo 27.- Calcule $I = \iint\limits_{D} \frac{x}{y} dxdy$, donde D es la región limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y por las rectas $y = x$, $y = 4x$

Solución

Sea la transformación

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u}{v} \\ y = v \ \ (v > 0) \end{cases}$$

Para las fronteras de la región D (Fig. 5.38b), se tiene:

Si $y = x$, entonces $v = \dfrac{u}{v}$, esto es, $v^2 = u$

Si $y = 4x$, entonces $v = 4\left(\dfrac{u}{v}\right)$, esto es, $v^2 = 4u$

Si $xy = 1$, entonces $\left(\dfrac{u}{v}\right)v = 1$, esto es, $u = 1$

Si $xy = 2$, entonces $\left(\dfrac{u}{v}\right)v = 2$, esto es, $u = 2$

Luego, para la transformación $T: D^* \to D$, la región D^* está dada por

$D^* = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 \ \ \sqrt{u} \leq v \leq 2\sqrt{u}, \ \ 1 \leq u \leq 2\}$ (Fig. 5.38a)

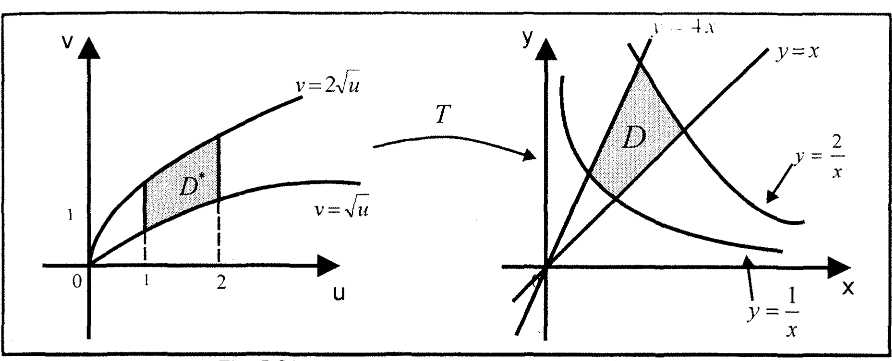


Fig. 5.38a

Fig. 5.38b

El Jacobiano de la transformación $T(u; v) = \left(\dfrac{u}{v}; v\right)$ es

$$J(u; v) = \frac{\partial(x; y)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{v} & \dfrac{-u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v}$$

Por consiguiente, $I = \displaystyle\iint_D \frac{x}{y} dxdy = \int_1^2 \int_{\sqrt{u}}^{2\sqrt{u}} \left(\frac{u}{v^2}\right)\frac{1}{v} dvdu = \frac{3}{4}$

Ejemplo 28.- Calcule $\displaystyle\iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} + x\right) dA$, donde la región D es

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 2y\}$$

Solución

En coordenadas polares ($x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$), la región D se transforma en $D^* = \{(r;\theta) \ / \ 0 \le \theta \le \pi, \ \ 0 \le r \le 2\,sen\,\theta\}$ (Fig. 5.39)

Luego, se tiene:

$$I = \iint_D \left(\sqrt{4-x^2-y^2}+x\right)dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,sen\,\theta}(\sqrt{4-r^2}+r\cos\theta)\,rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[-\frac{8}{3}|cos^3\theta| + \frac{8}{3}sen^3\theta\cos\theta + \frac{8}{3}\right]d\theta$$

$$= -\frac{8}{3}\int_0^{\pi}|cos^3\theta|d\theta + \left[\frac{2}{3}sen^4\theta + \frac{8}{3}\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{8}{3}\left[\int_0^{\pi/2}cos^3\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}(-cos^3\theta)d\theta\right] + \frac{8\pi}{3} = -\frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{8\pi}{3} = \frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}$$

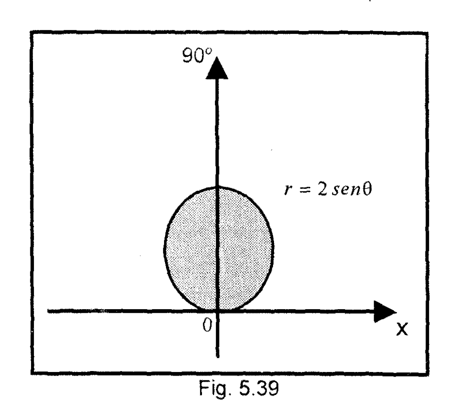


Fig. 5.39

Fig. 5.40

Ejemplo 29.- Calcule $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dA$, donde

$$D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

Solución

La frontera de la región D es la elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$

Al utilizar la transformación a coordenadas polares, se tiene

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = r\cos\theta \\ \frac{y}{b} = r\,sen\,\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\,sen\,\theta \end{cases}$$

Así, la región de integración en coordenadas polares está dada por
$D^* = \{(r;\theta) \ / \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1\}$ (Fig. 5.40)
El jacobiano de la transformación es

$$J(r;\theta) = \frac{\partial(x;y)}{\partial(r;\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\ sen\ \theta \\ b\ sen\ \theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$$

Luego, se tiene

$$I = \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dA = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}|J(r;\theta)|drd\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\ abrdrd\theta = \frac{2ab\pi}{3}$$

Ejemplo 30.- Calcule $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dA$, donde D es la región en el primer cuadrante acotado por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados.

Solución

Al transformar la región a coordenadas polares, se tiene
$D^* = \left\{(r;\theta) \ / \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq a\right\}$ (Fig.5.41)
Luego, se tiene

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^a e^{-r^2}\, r\, drd\theta = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2})$$

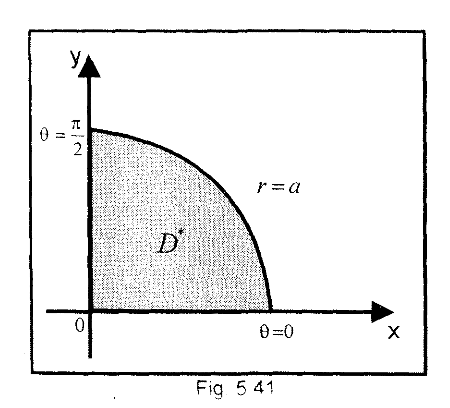


Fig. 5.41

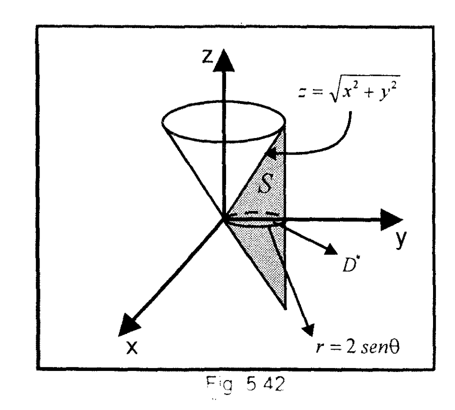


Fig. 5.42

Ejemplo 31.- Halle el volumen del sólido S limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$

Solución

El sólido S es la superficie sombreada en la Fig. 5.42, donde la región de integración es el disco D cuya circunferencia frontera tiene ecuación

$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$

En coordenadas polares r y θ, la ecuación de la frontera de la circunferencia se convierte en $r^2 - 2r\,sen\,\theta = 0 \Leftrightarrow r = 2\,sen\,\theta$. Luego, la región D se transforma en

$D^* = \{(r;\theta)\ /\ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le r \le 2sen\,\theta\}$ (Fig. 5.43)

Así, el volumen del sólido S es

$$V(S) = \iint_D \left[\sqrt{x^2+y^2} - (-\sqrt{x^2+y^2})\right] dA$$

$$= 2\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA = 2\iint_{D^*} r^2\,drd\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\,sen\,\theta} r^2\,drd\theta = \frac{64}{9}u^3$$

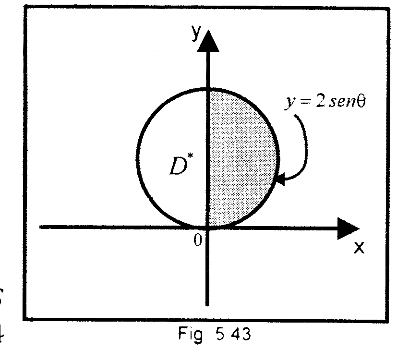


Fig 5 43

Ejemplo 32.- Halle el volumen del sólido S que está limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Solución

Al hacer $z = 0$ en la ecuación del hiperboloide, se obtiene $x^2 + y^2 = 1$. Esto significa que la región de integración, es el anillo circular comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (Fig. 5.44), es decir,

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

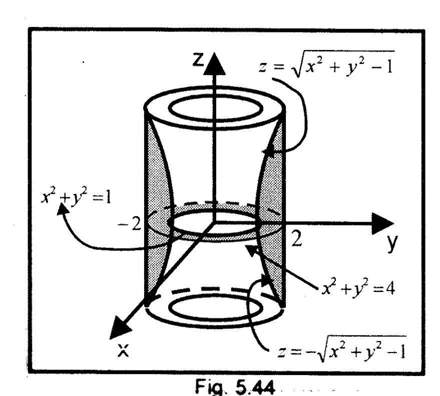


Fig. 5.44

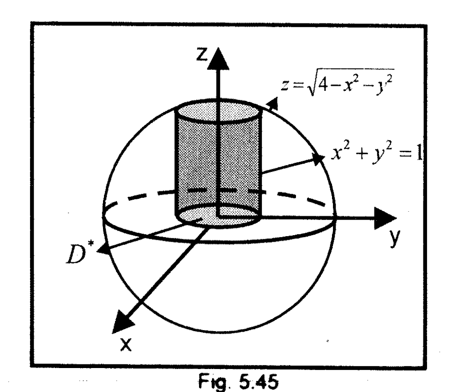


Fig. 5.45

Luego, el volumen del sólido S es

$$V = \iint_D \left[\sqrt{x^2+y^2-1} - (-\sqrt{x^2+y^2-1})\right] dA = 2\iint_D \sqrt{x^2+y^2-1}dA$$

En coordenadas polares la región de integración es

$D^* = \{(r;\theta)\ /\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \ 1 \leq r \leq 2\}$

Por consiguiente, el volumen del sólido es

$$V(S) = 2\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{r^2-1}\, rdrd\theta = 4\sqrt{3}\pi u^3$$

Ejemplo 33.- Halle el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=4$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por el cilindro $x^2+y^2=1$

Solución

El sólido S se encuentra bajo la superficie esférica y arriba del disco circular

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\ /\ x^2+y^2 \leq 1\}$

En coordendas polares la región de integración es

$D^* = \{(r;\theta) \in \mathbb{R}^2\ /\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \ \ 0 \leq r \leq 1\}$ (Fig. 5.45)

Por tanto, el volumen del sólido S es

$$V(S) = \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4-r^2}\, rdrd\theta = \frac{2}{3}(8-3\sqrt{3})\pi u^3$$

EJERCICIOS

1.- Calcule las siguientes integrales iteradas

a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{4\pi}{3}$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, dydx$ $\qquad$ $R.\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-4})$

c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}} sen\,(x^2+y^2)\, dxdy$ $\quad$ d) $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{18-y^2}}^{-y} sen\,(x^2+y^2)\, dxdy$

e) $\displaystyle I = \int_{-2}^2\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} \sqrt{16-x^2-y^2}\, dydx$ $\qquad$ $R.\ I = \dfrac{64(3\pi-4)}{9}$

f) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)^{-1/2}\, dxdy$ $\qquad$ $R.\ \sqrt{2}-1$

g) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA;\quad D: x^2+y^2 \leq 4$ $\qquad R.\ \dfrac{16\pi}{3}$

h) $\iint\limits_D xy\,dA;\quad D: 0 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \ y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ (sector circular) $R.\ \dfrac{1}{16}$

i) $\displaystyle\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dxdy$ $\qquad R.\ \dfrac{1}{2}\pi a^2$

2.- En los siguientes ejercicios, use las transformaciones indicadas para calcular la integral doble dada.

a) Calcule $\iint\limits_D \cos\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right) dxdy$; donde D es la región limitada por

$x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0$ $\qquad R.\ sen\left(\dfrac{1}{2}\right)$

b) Dada la función $f(x;y) = \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\,, y \leq 1 \\ \sqrt{4-4(x-1)^2-(y-1)^2}\,, y > 1 \end{cases}$

halle $\iint\limits_D f(x;y)\,dA$, siendo D la región limitada por las curvas

$$y = 1-\sqrt{2x-x^2},\ \ y = 1+2\sqrt{2x-x^2} \qquad R.\ \frac{5\pi}{3}$$

Sugerencia: Use la transformación $u = x-1,\ \ v = y-1$

c) $\iint\limits_D e^{\sqrt{x+2y}}dA$, si D es la región limitada por las rectas $x+2y=4$, $x-2y=0$ y el eje X.

R. $3+e^2$ Sugerencia: hacer $x = u^2+v^2,\ \ y = uv$

d) $\iint\limits_D \dfrac{y^2\cos xy}{x}\,dxdy$; donde D es la región limitada por las parábolas

$x^2 = y,\ \ y^2 = x,\ \ x^2 = 4y,\ \ y^2 = 4x$

Sugerencia: Hacer $x = u^2v,\ \ y = v^2u$

$$R.\ \frac{\cos 4-\cos 16}{12}+\frac{\cos 4-\cos 1}{3}$$

e) $\iint\limits_D y\,dydx$, donde D es la región limitada por las curvas

$$x = 5 - \frac{y}{2} + e^{y/2},\quad x - y = e^{y/2},\quad x + 5 = y + e^{y/2},\quad x + \frac{y}{2} = e^{y/2}$$

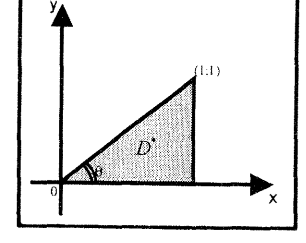
Sugerencia: Hacer $u = x + \frac{y}{2} - e^{y/2},\quad v = x - y - e^{y/2}$ $\quad R.\ \frac{500}{9}$

f) $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\, dydx$, *hacer* $u = x + y.\ \ y = uv$ $\quad R.\ \frac{e-1}{2}$

g) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$, donde D es la región en el plano XY limitado por

$x^2 + y^2 = 4,\quad x^2 + y^2 = 9$ $\quad R.\ \frac{38\pi}{3}$

3.- Evaluar la integral doble de $z = f(x;y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en la región triangular de vértices en $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$



Solución

Al hacer $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$, se tiene

$$D^* = \left\{(r;\theta)\ /\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},\ \ 0 \le r \le \sec\theta\right\}$$

Luego, $I = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\theta} r^2\, drd\theta = \frac{1}{6}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$

4.- Halle el área de la región limitada por las curvas

$xy = 4,\ \ xy = 8,\ \ xy^3 = 15,\ \ xy^3 = 5$ $\quad R.\ 2\ \ln(3)\ u^2$

5.- Encuentre el área de la región en el primer cuadrante del plano XY, limitada por las curvas $x^2 + 2y^2 = 1,\ \ x^2 + 2y^2 = 4,\ \ y = 2x,\ \ y = 5x$

6.- Halle el volumen del sólido limitado inferiormente por el plano XY, superiormente por el elipsoide de revolución $b^2x^2 + b^2y^2 + a^2z^2 = a^2b^2$ y lateralmente por el cilindro $x^2 + y^2 - ay = 0$ $\quad R.\ I = \frac{2}{9}a^2b(3\pi - 4)u^3$

7.- En cada uno de los siguientes ejercicios, halle el volumen de S.

a) S es el sólido limitado por las superficies

$z = 0,\ \ 2z = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 = 4$ $\quad R.\ 4\pi u^3$

b) S es el conjunto que se obtiene cortando una esfera de radio 4 con un cilindro de radio 2 cuyo eje es un diámetro de la esfera. $R.\ \frac{32\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3})u^3$

c) S es el conjunto limitado por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el paraboliode

$3z = x^2 + y^2 \quad R.\ V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \left(r - \frac{r^2}{3}\right) r\,dr\,d\theta = \frac{9\pi}{2}u^3$

d) S está limitado por las superficies $z = x$ y $2z = x^2 + y^2$ R. $(\pi/4)u^3$

e) S está limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2,\ y = 0,\ y = x,\ x = a$

$$R.\ \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})a^3}{3}u^3$$

8.- Calcule $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dA$, donde D es la región acotada por los círculos

$x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$ R. $\pi e(e^3 - 1)u^3$

9.- Sea D el anillo $1 \le x^2 + y^2 \le 2$.Calcule $\iint_D \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy$

Encuentre el volumen del sólido acotado por los cilindros

$y = x^2,\ y = x^3$ y los planos $z = 0,\ z = 1 + 3x + 2y$ R. $(61/210)u^3$

10.- Calcule la integral $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$, donde D es el triángulo con

vértices $(0;0),\ (2;0),\ (1;\sqrt{3})$ $R.\ \frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

11.- Halle el volumen del sólido acotado por las superficies

$z = x^2 + y^2$ y $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 1)$ $R.\ \frac{\pi}{4}u^3$

12.-Use coordenadas polares para obtener $\iint_D f(x;y)dA$ para la función f

y la región D dada.

a) $f(x;y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, D es la región en el primer cuadrante entre los círculos

$x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2,\ 0 < a < b$ $R.\ \frac{\pi}{2}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

b) $f(x;y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}$, D es la región del ejercicio a $R.\ \frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

13.- Halle el volumen de la región situada sobre el disco $x^2+(y-1)^2 \leq 1$ y acotada por arriba por la función $z = x^2 + y^2$ R. $(3\pi/2)u^3$

14.- Calcule $\iint\limits_D xy\left(\frac{x^4}{a^2}+\frac{y^4}{b^2}\right)dxdy$, donde

$$D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; \frac{x^4}{a^2}+\frac{y^4}{b^2} \leq 1,\;\; x \geq 0,\;\; y \geq 0\right\}$$

Sugerencia: Use la transformación $\frac{x^2}{a} = r\cos\theta$, $\frac{y^2}{b} = r\,sen\,\theta$ $R.\frac{ab\pi}{32}$

15.- Halle el volumen encerrado por las superficies definidas por las ecuaciones

$x^2+y^2 = cz,\;\; x^2+y^2 = ax,\;\; z = 0$ $R.\;\frac{3\pi a^4}{32c}u^3$

16.- Pruebe que $\int_0^a\int_0^b \frac{dxdy}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{c}\arctan\left(\frac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

Sugerencia: Use coordenadas polares.

17.- Halle el volumen del sólido en el primer octante acotado por los cilindros parabólicos $z = 9 - x^2,\;\; x = 3 - y^2,\;\; y = 0,\;\; x = 0$ R. $486\sqrt{3}/35\,u^3$

18.- Halle el volumen del sólido limitado por el plano XY, el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ $R.\;\frac{32}{9}a^3u^3$

19.- Calcule el volumen de cada una de las siguientes regiones

a) La región entre el paraboloide $a^2z = H(a^2 - x^2 - y^2)$ y el plano XY

$R.\;\frac{\pi H a^2}{2}u^3$

b) La porción del primer octante de la región del cono $a^2y^2 = h^2(x^2+z^2)$ entre $y = 0$ e $y = h$ $R.\;\left(\frac{\pi a^2 h}{12}\right)u^3$

20.- Calcule el volumen de los sólidos descritos, usando integrales dobles y coordenadas polares.

a) Interior del cilindro $x^2+y^2 = a^2$, entre el plano $z = 0$ y $z = x$ en la cual $x \geq 0$

$R.\;\frac{2}{3}a^3u^3$

b) Interior del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, entre $z = 0$ y $a^2 z = h(x^2 + y^2)$

$$R.\ \frac{\pi}{2} a^2 h\, u^3$$

c) La región entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y el cilindro $x^2 + (y - a)^2 = a^2$

$$R.\ \frac{16}{9} a^3 (3\pi - 4) u^3$$

5.5 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DOBLE

CENTRO DE MASA DE UNA LÁMINA

Cuando se usa integrales simples para encontrar el centro de masa de una lámina homogénea se considera solamente láminas de densidad de área constante. Emplearemos ahora integrales dobles para determinar el centro de masa de cualquier lámina homogénea o no homogénea.

Sea D una lámina que tiene la forma de una región cerrada en el plano XY, y sea ρ la medida de densidad de área de la lámina en cualquier punto $(x; y)$ de D, donde $\rho: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es función continua sobre D.

La masa total de la lámina D está dada por

$$M = \iint_D \rho(x; y) dA$$

1. El momento de masa de una lámina D con respecto al eje X está dado por

$$M_X = \iint_D y\rho(x; y) dA$$

2. De manera similar, el momento de masa de una lámina D con respecto al eje Y es

$$M_Y = \iint_D x\rho(x; y) dA$$

Por tanto, el centro de masa de la lámina es el punto $(\overline{x}; \overline{y})$, donde

$$\overline{x} = \frac{M_Y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x; y) dA}{\iint_D \rho(x; y) dA}, \quad \overline{x} = \frac{M_X}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x; y) dA}{\iint_D \rho(x; y) dA}$$

Ejemplo 34.- Una lámina que tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles tiene una densidad de área que varía con el cuadrado de la distancia al vértice del ángulo recto. La masa se mide en kg. y la distancia se mide en pies. Si la longitud

de cada cateto del triángulo isósceles mide a pies, encuentre la masa y el centro de masa de la lámina.

Solución

La densidad de área de la lámina triangular en todo punto $(x;y)$ es

$$\rho(x;y)=k(x^2+y^2)$$

Como se muestra en la figura 5.46, la región D está dada por

$$D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ 0\le x\le a,\ \ 0\le y\le a-x\}$$

Luego, la masa, el momento de masa con respecto al eje Y y al eje X de la lámina son:

$$M=\iint_D k(x^2+y^2)dA=k\int_0^a\int_0^{a-x}(x^2+y^2)dydx=\frac{1}{6}ka^4$$

$$M_Y=\iint_D x\rho(x;y)dA=k\int_0^a\int_0^{a-x}x(x^2+y^2)dydx=\frac{1}{15}ka^5$$

$$M_X=\iint_D y\rho(x;y)dA=\frac{1}{15}ka^5$$

Por tanto, el centro de masa de la lámina es $(\bar{x};\bar{y})=\left(\frac{M_Y}{M};\frac{M_X}{M}\right)=\left(\frac{2a}{5};\frac{2a}{5}\right)$

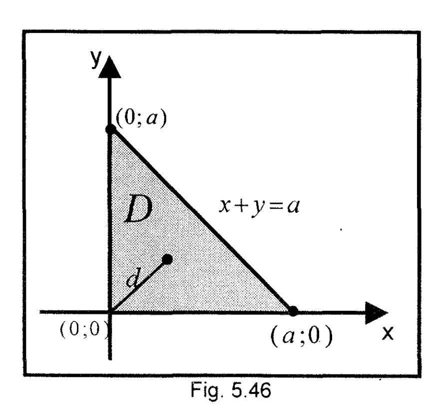


Fig. 5.46

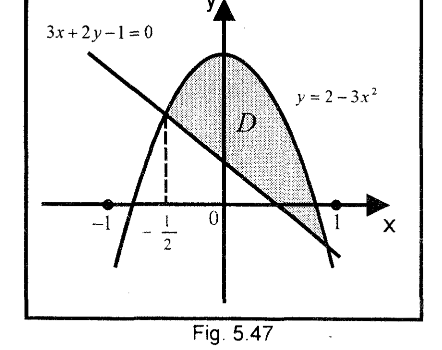


Fig. 5.47

Ejemplo 35.- Encuentre el centro de masa de una lámina homogénea (de densidad constante) que tiene la forma de la región limitada por la parábola $y=2-3x^2$ y la recta $3x+2y-1=0$

Solución

Como se muestra en la figura 5.47, la región D limitada por la parábola y la recta está dada por

$$D = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \leq y \leq 2 - 3x^2, \ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right\}$$

La densidad de la lámina en todo punto $(x; y) \in D$ es constante e igual a ρ. Luego, la masa y los momentos con respecto a los ejes coordenados son

$$M = \int_{-1/2}^{1} \int_{\frac{1-3x}{2}}^{2-3x^2} \rho dydx = \frac{27}{16}\rho$$

$$M_X = \int_{-1/2}^{1} \int_{\frac{1-3x}{2}}^{2-3x^2} \rho ydydx = \frac{27}{20}\rho, \ M_Y = \int_{-1/2}^{1} \int_{\frac{1-3x}{2}}^{2-3x^2} \rho xdydx = \frac{27}{64}\rho$$

Por tanto, el centro de masa de la lámina es $(\overline{x}; \overline{y}) = \left(\frac{1}{4}; \frac{4}{5}\right)$

Ejemplo 36.- Encuentre el centro de masa de una lámina semicircular de radio a, si la densidad de la lámina en cualquier punto $P(x; y)$ es proporcional a la distancia del punto P al centro del circulo.

Solución

La densidad de la lámina en cualquier punto $P(x; y)$ está dada por

$$\rho(x; y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

Como la lámina es simétrica con respecto al eje Y (Fig. 5.48), entonces el centro de masa está sobre el eje Y. Así, $\overline{x} = 0$

En coordenadas polares la lámina semicircular está dada por

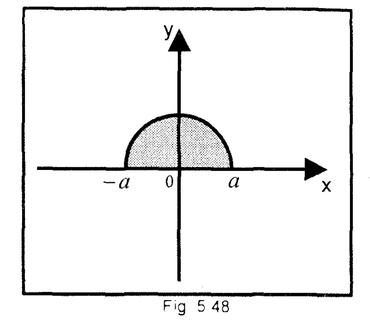


Fig 5 48

$$D^* = \{(r; \theta) \ / \ 0 \leq \theta \leq \pi, \ \ 0 \leq r \leq a\}$$

(Fig. 5.48)

Luego, la masa y el momento con respecto al eje X son

$$M = \int_0^{\pi} \int_0^{a} k\sqrt{r^2} \, rdrd\theta = \frac{\pi a^3 k}{3}$$

$$M_X = \int_0^{\pi} \int_0^{a} (kr)r(r \ sen \ \theta)drd\theta = \frac{ka^4}{2}$$

Por tanto, el centro de masa de la lámina semicircular es $(\overline{x}; \overline{y}) = \left(0; \frac{3a}{2\pi}\right)$

EJERCICIOS

1.- En los siguientes ejercicios encuentre el centro de masa de una lámina que tiene la función de densidad ρ y la forma de la región limitada por las curvas dadas.

a) $y=\sqrt{x},\;\; y=0,\;\; x=4;\; \rho$ es una constante $\quad R.\; \left(\frac{12}{5};\frac{3}{4}\right)$

b) $x^2-y^2=1,\;\; x=3;\; \rho(x;y)=x$

c) $x^2+y^2=64;\; \rho=x^2+y^2$ $\qquad$ d) $y=x^3,\;\; y=\sqrt{x};\; \rho=2x$

e) $y=0,\;\; y=\sqrt{a^2-x^2};\; \rho=3y$ $\qquad$ f) $y^2=x,\;\; x=y+2;\; \rho=x^2y^2$

g) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\;\; x=0,\;\; y=0;\; \rho=xy \quad R.\left(\frac{2a}{9};\frac{2a}{9}\right)$

h) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3},\;\; x=0,\;\; y=0;\; \rho=x^2y^2$

2.- Encuentre el centroide de las siguientes regiones planas, la densidad es cte.

a) La región en el primer cuadrante entre $x=0, x=1$ y entre

$y=x-x^2,\;\; y^2=4x \qquad R\colon \left(\frac{43}{70};\frac{59}{70}\right)$

b) La región en el primer cuadrante fuera de la parábola $y^2=2x$ e interior

al círculo $y^2=4x-x^2 \quad R.\; \left(\frac{30\pi-88}{5(3\pi-8)};\frac{2}{3\pi-8}\right)$

c) El área en el primer cuadrante acotado por la curva $y=x^3$ y la recta

$y=4x \qquad R.\; \left(\frac{16}{15};\frac{64}{21}\right)$

d) La región en el primer cuadrante acotada por la curva $y=5x^2-x^4$ y la recta $y=x$

3.- Encuentre la masa de un plato cuadrado de lado a, si su densidad es proporcional al cuadrado de la distancia desde un vértice $\quad$ R. $2ka^4/3$

4.- Encuentre la masa de un disco circular de radio a, si la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia desde un punto sobre la circunferencia al centro. $\qquad$ R. $k\pi a^4/4$

MOMENTOS DE INERCIA DE UNA LÁMINA

Definición 9.- Si una partícula de masa m se encuentra a d unidades de la recta L, entonces el número $I_L = md^2$ se llama *momento de inercia de la partícula* respecto a L.

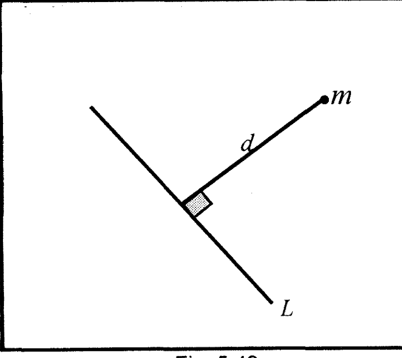


Fig. 5.49

El momento de masa de una partícula se llama usualmente el *primer momento* y el momento de inercia, el *segundo momento* de la partícula respecto a L.
Un sistema de n partículas de masas $m_1, m_2, \dots, m_n$, situadas a distancias $d_1, d_2, \dots, d_n$ respectivamente desde una recta L , tiene un momento de inercia I que se define como la suma de momentos de las partículas individuales.

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

De igual manera que para los momentos de masa de una lámina, se puede obtener los momentos de inercia de una lámina D de densidad $\rho: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con respecto a los ejes coordenados X e Y.
Estos momentos de inercia de una lámina que tiene la forma de una región plana D y una función de densidad $\rho: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con respecto a los ejes X e Y están dados por

$$I_X = \iint_D y^2 \rho(x;y)dA, \quad I_Y = \iint_D x^2 \rho(x;y)dA$$

El momento de inercia de la lámina alrededor del origen o el eje Z está dado por

$$I_O = I_X + I_Y = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x;y)dA$$

Observación 5.- Si D es una lámina en el plano XY que tiene una densidad continua $\rho: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces los primeros momentos M_1, M_2 de D en relación a las recta $x = a, y = b$ están dados respectivamente por

$$M_1^a = \iint_D (x - a)\rho(x;y)dA, \quad M_2^b = \iint_D (y - b)\rho(x;y)dA$$

Observación 6.- Los momentos de inercia de una lámina D respecto de las rectas $L_1: x = a,\ z = 0;\ L_2: y = b,\ z = 0;\ L_3: x = a,\ y = b$ son, respectivamente:

$$I_1^a = \iint_D (x-a)^2 \rho(x;y)dA\,;\quad I_2^b = \iint_D (y-b)^2 \rho(x;y)dA$$

$$I_0^{a,b} = \iint_D [(x-a)^2 + (y-b)^2]\rho(x;y)dA$$

Definición 10.- El radio de giro de un objeto respecto de un eje L es el número R dado por $R = \sqrt{\dfrac{I_L}{M}}$, donde I_L es el momento de inercia de L y M es la masa total del objeto.

Ejemplo 37.- Encuentre I_X y I_Y para la lámina homogénea que tiene la forma de la región D acotada por la curva $y = \sqrt{x}$ y por las rectas $y = 0,\ x = 4$

Solución

$D = \{(x;y)\ /\ 0 \le y \le \sqrt{x},\ \ 0 \le x \le 4\}$
(Fig. 5.50)

Puesto que ρ es una constante, se tiene

$$I_X = \iint_D \rho y^2 dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \rho y^2 dy dx = \frac{64}{15}\rho$$

$$I_Y = \iint_D \rho x^2 dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \rho x^2 dy dx = \frac{256}{7}\rho$$

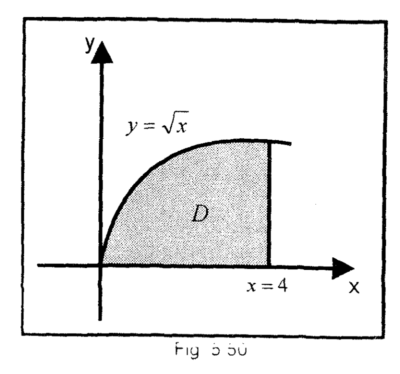


Fig 5.50

Ejemplo 38.- Una lámina rectangular homogénea limitada por las rectas $y = 0$, $y = b$, $x = 0$ y $x = a$ tiene una densidad de área constante de $\rho\ kg\ /pie^3$. Halle el momento de inercia de la lámina con respecto a una esquina.

Solución

Sea D la lámina rectangular homogénea mostrada en la figura 5.51, esto es

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b\}$$

Luego, el momento de inercia de la lámina con respecto a una esquina (origen de coordenadas) es

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2)\rho dA = \frac{1}{3}\rho ab(a^2 + b^2)$$

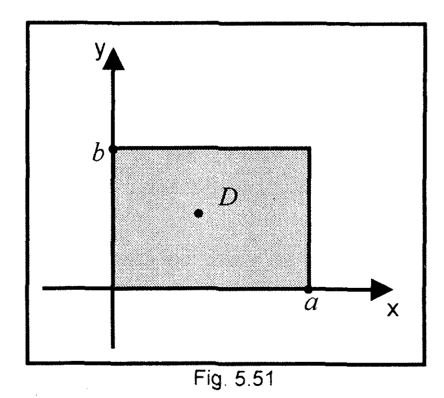


Fig. 5.51

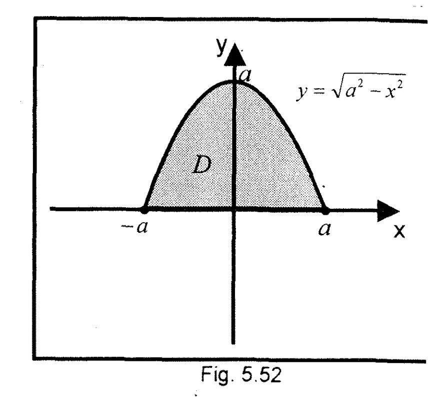


Fig. 5.52

Ejemplo 39.- Halle el radio de giro de una lámina semicircular de radio a con respecto a su diámetro, si la densidad de la lámina en un punto es proporcional a la distancia entre el punto y el diámetro.

Solución

Como la densidad de la lámina en cualquier punto $(x; y)$ es proporcional a la distancia entre el punto y el diámetro (eje X) (Fig. 5.52), entonces

$$\rho(x; y) = ky$$

Luego,

$$M = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} ky\, dydx = \frac{2}{3}ka^3, \quad I_X = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} ky^3\, dydx = \frac{4ka^5}{15}$$

Por tanto, el radio de giro R de la lámina está dado por

$$R = \sqrt{\frac{I_X}{M}} = \frac{\sqrt{10}}{5}a \cong 0{,}6325a$$

Ejemplo 40.- Encuentre el radio de giro de una lámina homogénea que tiene la forma de un triángulo de catetos a y b, con respecto a un eje perpendicular al plano del triángulo que pasa por el vértice del ángulo recto.

Solución

El triángulo de catetos a y b se ilustra en la Fig. 5.53, donde la ecuación de la hipotenusa es $y = -\frac{a}{b}x + a$

Como la densidad de la lámina es constante ρ, entonces la masa y el momento de inercia con respecto al eje Z son, respectivamente:

$$M = \iint_D \rho dA = \int_0^b \int_0^{-\frac{a}{b}x+a} \rho dydx = \frac{\rho ab}{2}$$

$$I_Z = \iint_D \rho(x^2 + y^2)dA = \rho \int_0^b \int_0^{-\frac{a}{b}x+a} (x^2 + y^2)dydx = \frac{\rho ab}{12}(a^2 + b^2)$$

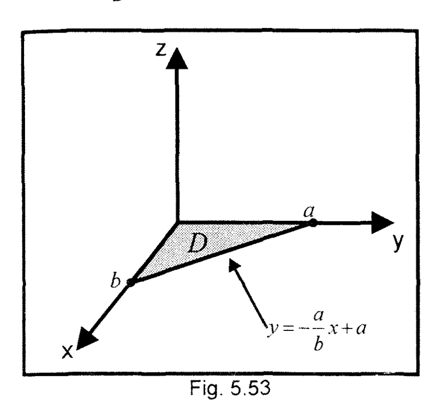


Fig. 5.53

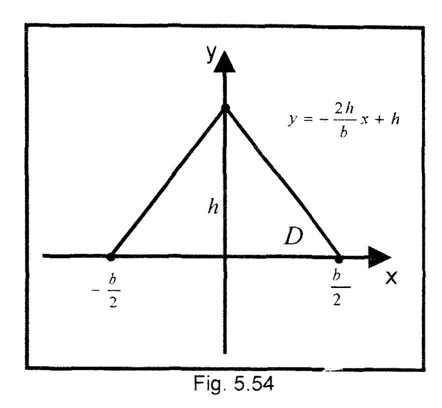


Fig. 5.54

Por consiguiente, el radio de giro de la lámina con respecto a su eje perpendicular es

$$R = \sqrt{\frac{I_Z}{M}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{6}}$$

Ejemplo 41.- Una lámina homogénea de densidad de área $\rho\ kg/\ pie^2$ tiene la forma de la región acotada por un triángulo isóceles que tiene una base de longitud b y una altura de longitud h. Encuentre el radio de giro de la lámina con respecto a su eje de simetría.

Solución

El triángulo isóceles se muestra en la figura 5.54, donde la ecuación de uno de los lados iguales es $y = -\frac{2h}{b}x + h$

Luego, la masa y el momento de inercia con respecto al eje Y son respectivamente

$$M = \iint_D \rho dA = 2\rho \int_0^{b/2} \int_0^{h-\frac{2h}{b}x} dydx = \frac{\rho hb}{2}$$

$$I_Y = \iint_D \rho(x-0)^2 dA = 2\rho \int_0^{b/2} \int_0^{h-\frac{2h}{b}x} x^2 dydx = \frac{\rho hb^3}{48}$$

Por tanto, el radio de giro de la lámina con respecto a su eje de simetría es

$$R = \sqrt{\frac{I_Y}{M}} = \frac{b\sqrt{6}}{12}$$

Ejemplo 42.- Una lámina rectangular ABCD tiene función de densidad ρ. Encuentre el radio de giro de la lámina respecto al lado AB si ρ es constante.

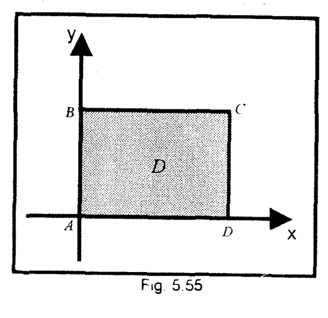


Fig. 5.55

Solución

El rectángulo ABCD se muestra en la figura 5.55.

Luego, se tiene:

$$M = \iint_D \rho dA = \rho \int_0^{|AD|} \int_0^{|AB|} dydx = \rho |AB||AD|$$

$$I_{AB} = \iint_D x^2 \rho dA = \rho \int_0^{|AD|} \int_0^{|AB|} x^2 dydx = \frac{\rho |AB||AD|^3}{3}$$

Por tanto, el radio de giro es

$$R = \sqrt{\frac{I_{AB}}{M}} = \frac{|AD|}{\sqrt{3}}$$

EJERCICIOS

1.- En los siguientes ejercicios encuentre la masa y el centro de masa de la lámina dada, si la densidad de área es como se indica.

a) Una lámina tiene la forma de la región rectangular acotada por las rectas $x = 3$, $y = 2$ y los ejes coordenados. La densidad de área en cualquier punto es xy^2

$R.\ 12\ kg., \left(2; \frac{3}{2}\right)$

b) Una lámina tiene la forma de la región acotada por la parábola $x^2 = 8y$, la recta $y = 2$ y el eje Y. La densidad de área varía con la distancia a la recta $y = -1$

$R.\ \frac{176}{15}\ kg., \left(\frac{35}{22}; \frac{102}{77}\right)$

c) Una lámina tiene la forma de la región acotada por la curva $y = e^x$, $x = 1$ y los ejes coordenados. La densidad del área varía con la distancia al eje X.

$R.\ \frac{k(e^2-1)}{4};\ \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{9}\left(\frac{e^3-1}{e^2-1}\right)\right)$

d) Una lámina tiene la forma de la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$ y los ejes coordenados. La densidad del área varía con la suma de las distancias a las dos orillas rectas.

$R.\ \frac{2}{3}a^3;\ \left(\frac{3a(2+\pi)}{32};\frac{3a(2+\pi)}{32}\right)$

e) Una lámina tiene la forma de la región acotada por un triángulo cuyos lados son los segmentos de los ejes coordenados y la recta $3x + 2y = 18$. La densidad de área varía con el producto de las distancias a los ejes coordenados.

2.- Halle I_X, I_Y y I_0 para las regiones dadas. Considere $\rho = 1$

a) La región limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la recta $x = 2$

b) La región limitada por la gráfica de la ecuación $|x| + |y| = 1$ R. 1/3, 1/3, 2/3

c) La región limitada por la gráfica de la ecuación $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

3.- Una lámina rectangular ABCD tiene una función de densidad ρ. Encuentre el radio de giro de la lámina respecto a:

a) AB si la densidad en el punto P es la suma de las distancias de P a AB y BC.

b) La recta perpendicular a la lámina en B, si la densidad en un punto P es la suma de las distancias de P a AB y AC.

c) La recta perpendicular a la lámina en su centro de masa, si ρ es constante

$R.\ \frac{|BD|}{\sqrt{3}}$

4.- Una lámina circular con centro en el origen y radio a, tiene una función de densidad ρ. Encuentre el radio de giro de la lámina respecto a:

a) Un diámetro, si ρ es constante R. $a/2$

b) Una perpendicular a la lámina en el origen, si ρ es constante

c) Una tangente, si ρ es constante R. $a\sqrt{5}\,/2$

5.- Una lámina tiene la forma de un triángulo con lados de longitud a, b y c. Suponiendo que ρ es una constante, encuentre el momento de inercia de la lámina respecto al lado de longitud c.

$R.\ \frac{ch^3}{12}$ (h es la altura sobre el lado c)

6.- Calcule el momento de inercia de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

a) respecto al eje Y $R.\ \frac{\pi a^3 b}{4}$

b) respecto al origen de coordenadas. $R.\ \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2)$

7.- Calcule el momento de inercia del área del círculo
$(x-a)^2+(y-b)^2=2a^2$, respecto al eje Y. R. $3\pi a^4$

8.- Calcule el momento de inercia del área de la figura limitada por la parábola $y^2=ax$ y la recta $x=a$ respecto a la recta $y=-a$

9.- Halle el momento polar de inercia de la región F en el plano XY limitado por $x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=9,\ xy=2,\ xy=4$, la densidad $\rho=1$
Sugerencia: hacer $u=x^2-y^2,\ y=2xy$ R. 8

10.- Calcule el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola $xy=4$ y la recta $x+y=5$ con respecto a la recta $y=x$
Sugerencia: La distancia desde el punto $(x;y)$ a la recta $y=x$ es igual a
$d=\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ $R.\ 16\ \ln 2-9\dfrac{3}{8}$

11.- En una lámina cuadrada de lado a, la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices. Calcule el momento de inercia de dicha lámina con respecto a los lados que pasan por este vértice.

12.- Halle la masa, centro de masa, momento polar de inercia de la lámina D cuya densidad ρ se da por:

a) D limitada por y=0, $y=sen\ x$, $0\le x\le\pi$, ρ varía con la distancia al eje X.

$$R.\ M=\frac{\pi}{4},\ \ \overline{x}=\frac{\pi}{2},\ \ \overline{y}=\frac{16}{9\pi},\ \ I_O=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^3}{12}$$

b) D limitada por $y=e^x$, $x=1$ y los ejes coordenados, ρ varia con la distancia al eje X.

c) D limitada por la cardioide $r=2(1+\cos\theta)$, $\rho=k$

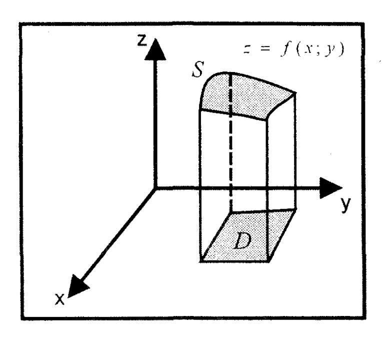
$$R.\ M=6k\pi,\ \ \overline{x}=\frac{20}{9},\ \ y=0$$

d) D acotada por una rama cerrada de $r^2=a^2\cos 2\theta$, densidad $\rho=k$

$$R.\ M=\frac{ka^2}{2},\ \ \overline{x}=\frac{a\pi}{4\sqrt{2}},\ \ \overline{y}=0,\ \ I_O=\frac{ka^4\pi}{16}$$

ÁREA DE UNA SUPERFICIE

El método dado en la sección 4.5 de Tópicos de *Cálculo Vol. II* sólo fue aplicado para calcular el área de una superficie de revolución. Ahora se presenta un método general para determinar el área de la porción de la superficie $z = f(x;y)$ que se localiza sobre una región D del plano XY.



Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función no negativa, con primeras derivadas parciales continuas en la región cerrada D en el plano XY. El área de la superficie $z = f(x;y)$ que está sobre D (Fig. 5.56) está dada por la fórmula

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA \quad \dots (I)$$

Observación 7.-

i) Si fuera más cómodo proyectar la superficie S sobre el plano XZ, se usa la fórmula

$$A(S) = \iint_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA \quad \dots (II)$$

donde D' es la región cerrada en el plano XZ.

ii) Si la proyección de la superficie S está sobre el plano YZ, se usa la fórmula

$$A(S) = \iint_{D^*} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA \quad \dots (III)$$

iii) Si la función está definida en forma implícita por la ecuación $F(x;y;z) = 0;\ \ z = f(x;y)$; entonces, el área de la superficie $z = f(x;y)$ con base D en el plano XY es dada por

$$A(S) = \iint_D \frac{\sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}}{|F_z|}\, dA \quad \dots (IV)$$

Ejemplo 43.- Halle el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra arriba del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$

Solución

La esfera y el paraboloide se cortan en $z = 1$. Luego, la superficie de la esfera que se encuentra arriba del paraboloide está arriba del círculo

$D: x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}$, esto es,

$D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \ -\sqrt{3 - x^2} \leq y \leq \sqrt{3 - x^2}\}$ (Fig. 5.57)

Al despejar z en la ecuación de la esfera, se obtiene

$$z = f(x; y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Al usar la fórmula (I), se tiene

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{4 - x^2 - y^2}}\, dA = 2\iint_D \frac{dA}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Al pasar a coordenadas polares, resulta

$$A(S) = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{4 - r^2}} = -\int_0^{2\pi}(-2)d\theta = 4\pi u^2$$

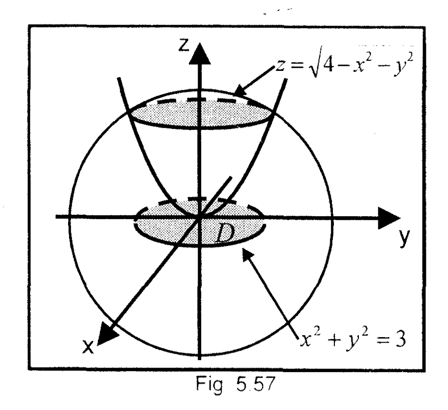


Fig 5.57

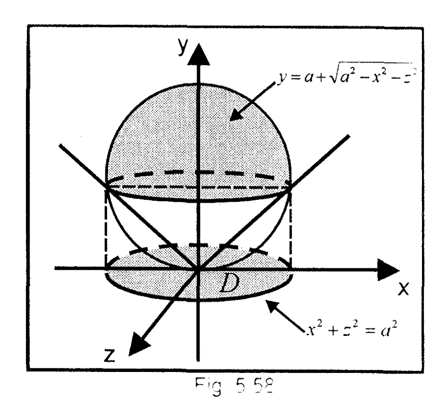


Fig 5.58

Ejemplo 44.- Determine el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$ que es cortada por un manto del cono $y^2 = x^2 + z^2$

Solución

La esfera y el cono se cortan en $y = a$. Luego, la proyección de la esfera $y = f(x; y) = a + \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$ que se encuentra arriba del cono sobre el plano XZ proporciona la región

$D = \{(x; z) \in \mathbb{R}^2 / -a \leq x \leq a, \quad -\sqrt{a^2 - x^2} \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$ (Fig. 5.58)

Al aplicar la fórmula (II) a la función $y = f(x; y) = a + \sqrt{a^2 - x^2 - z^2}$, se tiene

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA = \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}} dA$$

Al pasar a coordenadas polares, se obtiene

$$A(S) = a \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta = 2\pi a^2 u^2$$

Ejemplo 45.- Encuentre el área de la parte del paraboloide $x^2 + y^2 = 8 - z$ que está comprendida entre los conos

$$x^2 + y^2 = 7z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} \text{ y } z > 0$$

Solución

El paraboloide $z = 8 - x^2 - y^2$ y el cono $x^2 + y^2 = 7z$ se cortan en $z = 1$ $(z > 0)$, y el paraboloide y el cono $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$ se cortan en $z = 4$ (Fig.5.59).

Luego, la proyección de la porción del paraboloide comprendido entre los conos sobre el plano XY proporciona la región D que se muestra en la figura 5.60.

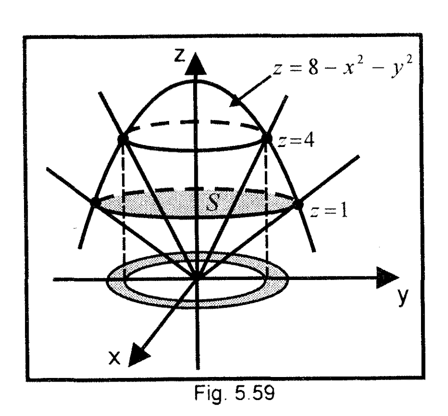


Fig. 5.59

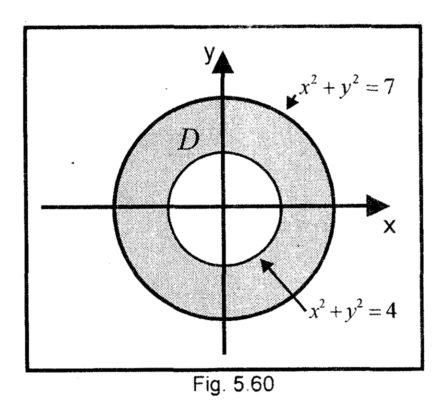


Fig. 5.60

Como $\frac{\partial y}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -2y$, el área de la superficie S está dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}\, dA = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dA$$

Al pasar a coordenadas polares, se obtiene

$$A(S) = 4\int_0^{\pi/2}\int_2^{\sqrt{7}} \sqrt{1+4r^2}\, rdrd\theta = \frac{\pi}{6}(29\sqrt{29} - 17\sqrt{17})u^2$$

Ejemplo 46.- Halle el área de la parte del cono $y^2 + z^2 = 3x^2$ que se encuentra arriba del plano YZ e interior al cilindro $y^2 + z^2 = 4y$

Solución

La región D en el plano YZ interior al cilindro se muestra en la figura 5.62 y está descrita por

$$D = \left\{(y; z) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le y \le 4,\ \ -\sqrt{4y - y^2} \le z \le \sqrt{4y - y^2}\right\}$$

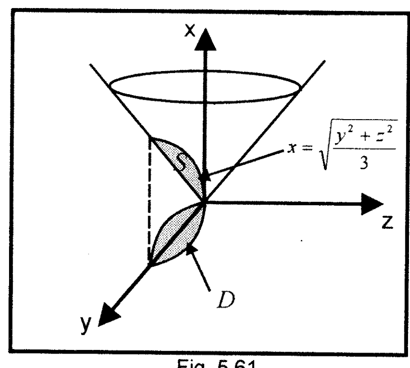


Fig. 5.61

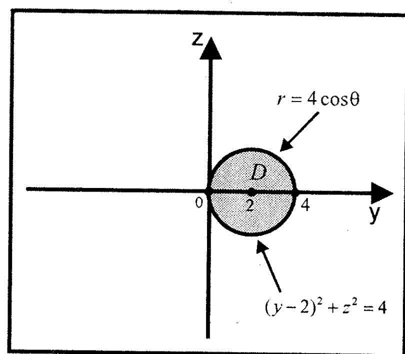


Fig. 5.62

Al despejar x en la ecuación del cono, se obtiene

$$x = f(y; z) = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{3}}$$

Así, el área de la superficie S que se muestra en la figura 5.61 es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA = \iint_D \frac{2}{\sqrt{3}} dA$$

Al pasar a coordenadas polares, la región de integración está descrita por

$$D' = \left\{(r; \theta) \,/\, 0 \le r \le 4\cos\theta,\ \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\} \text{ (Ver Fig.5.62)}$$

Por tanto, el área de la superficie S es

$$A(S) = \iint_{D'} \frac{2}{\sqrt{3}} dA = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} \frac{2}{\sqrt{3}} rdrd\theta = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} u^2$$

Ejemplo 47.- Halle el área de la parte del cilindro $z^2 + x^2 = 16$ que se encuentra arriba del plano XY e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$

Solución

La parte del cilindro $z^2 + x^2 = 16$ que se encuentra arriba del plano XY e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$ en el primer octante, se muestra en la figura 5.63 y su proyección sobre el plano XY está descrita por la región

$$D = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 4,\ \ 0 \le y \le \sqrt{16 - x^2}\right\} \text{ (Ver Fig.5.64)}$$

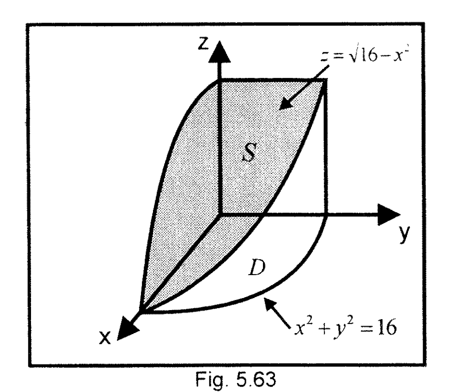


Fig. 5.63

Fig. 5.64

Luego, el área de la superficie $z = \sqrt{16 - x^2}$ es 4 veces el área de la superficie S que se muestra en la figura 5.63, esto es

$$A(S) = 4\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = 4\iint_D \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dA$$

$$= 16\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{1}{\sqrt{16 - x^2}} dydx = 64u^2$$

Ejemplo 48.- Calcule el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ que se encuentra entre los planos $z = x$, $z = 2x$, en el primer octante.

Solución

La parte del cilindro que se encuentra arriba del plano XZ, se muestra en la figura 5.65 y su proyección sobre el plano XZ está descrita por la región

$$D = \{(x; z) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \le x \le 4, \quad x \le z \le 2x\} \text{ (Ver Fig. 5.66)}$$

Por tanto, al usar la fórmula (II), el área de la parte del cilindro

$y = f(x; z) = \sqrt{16 - x^2}$ está dada por

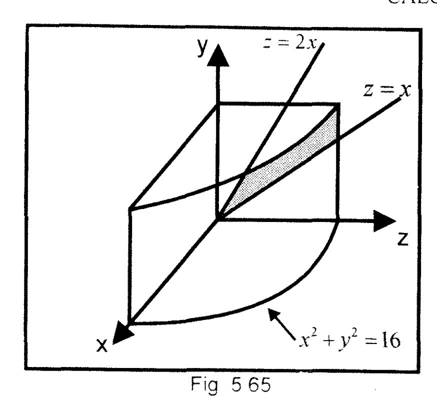


Fig 5 65

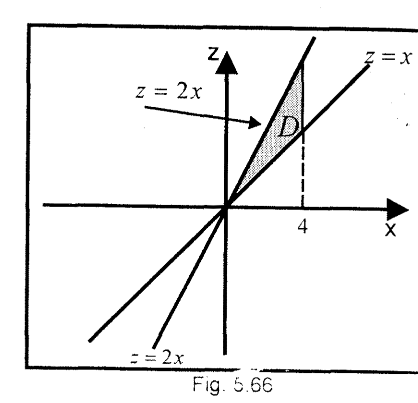


Fig. 5.66

$$A(S)=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dA=\iint_D \sqrt{1+\frac{x^2}{16-x^2}+0}\,dA$$

$$=\iint_D \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\,dA=4\int_0^4\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dzdx=16u^2$$

EJERCICIOS

1.- Halle el área de la superficie que se forma cuando los planos $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=4$ cortan al plano $z-2x-y=5$

2.- Halle el área de la porción del cilindro $x^2+y^2=4$ comprendido entre el plano $z=5x$ y el plano XY. R. 80

3.- Halle el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=8y$ que está dentro del paraboloide $5y=x^2+z^2$ R. 40π

4.- Halle el área de la parte del paraboloide $y^2+z^2=8x$ interceptada por el cilindro parabólico $y^2=2x$ y el plano $x=6$ R. $224\pi a^2/9$

5.- Halle el área de la superficie que se forma cuando los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$ cortan al plano $2x+y+z=4$ R. $\sqrt{6}$

6.- Halle el área de la superficie que se forma al cortar el cono $x^2+y^2=z^2$ por el plano $x+y=4$

7.- Halle el área de la porción de la superficie que se forma al cortar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ por una hoja del cono $y^2 + z^2 = x^2$ R. 8π

8.- Halle el área de la parte del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ comprendida entre los planos coordenados $R.\ \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}$

9.- Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$ que está dentro del cono $z^2 = 3x^2 + 3y^2$

10.- Halle el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ $(z > 0)$ comprendida entre los planos $z = 5x,\ z = 2x$ R. $12a^2$

11.- Calcule el área de la parte del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ que se encuentra arriba del plano XY e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$

$R.\ \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi u^2$

12.- Halle el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$

13.- Encuentre el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5$ y que está fuera del paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$

14.- Calcule el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendida entre el plano XY y el cono $x^2 + y^2 = z^2$ R. $8a^2$

15.- Halle el área de la parte de la superficie $z = x^2 - y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

16.- Halle el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ y que está dentro del paraboloide $3z = x^2 + y^2$

17.- Calcule el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cortada por el cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $R.\ 8a^2\ arcsen\left(\frac{b}{a}\right)$

18.- Sea D la región en el primer cuadrante del plano XY que está limitada por

gráficas de $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1,\;\; x=0,\;\; x=2,\;\; y=0.$ Halle el área de la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ que está sobre D.

19.- Halle el área de la parte del cono $x^2=y^2+z^2$, situada dentro del cilindro $x^2+y^2=2ax$. **Sugerencia**: Use coordenadas polares R. $3\pi a^2$

20.- Encuentre el área de la parte de la esfera $\rho=a$, que está dentro del cono $\phi=\dfrac{\pi}{4}$ *R.* πa^2

21.- Halle el área de la porción del plano $x=z$ que está entre los planos $y=0$, $y=6$ y dentro del hiperboloide $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$ $R.\dfrac{72}{5}\left[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}\right]$

22.- Halle el área de la parte del cilindro $y^2=4x$ cortada por la esfera $x^2+y^2+z^2=5x$ **Sugerencia**: Proyectar la superficie sobre el plano XY

23.- Sea D la región en el plano XY limitado por las curvas $xy=1$, $2x+4y=9$ Establecer una integral iterada que se pueda usar para calcular el área de la parte del cilindro $y^2=2z$ que se encuentra sobre la región D.

$$R.\;\int_{1/4}^{2}\int_{1/y}^{\frac{9-4y}{2}}\sqrt{y^2+1}\,dxdy$$

24.- Halle el área de la parte del paraboloide $x^2+y^2=3z$ que está dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$

25.- Halle el área de la parte del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ cortada por el cilindro $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ R. $\sqrt{2}a^2$

26.- Encuentre el área de la parte del paraboloide $z=x^2+y^2$ que está bajo el plano de ecuación $z=k$

27.- Encuentre el área de la parte de la superficie que se forma al cortar el plano $3x+4y+6z=24$ por los planos coordenados *R.* $\dfrac{\sqrt{3904}}{2}$

28.- Calcule el área de la porción del plano $x+y+z=6$, comprendida entre la intersección del plano con el cilindro $x^2+y^2=9$ hasta la intersección del plano con el plano XY, en el primer octante. R. $\dfrac{9\sqrt{3}\left(4-\frac{\pi}{2}\right)}{2}u^2$

29.- Halle el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=9$ exterior al paraboloide $x^2+y^2+z=9$ R. $6\pi u^2$

30.- Sea D la región en el plano XY limitada por las rectas $y=x$, $x=1$ e $y=0$ Encuentre el área de la parte del cilindro $2z=x^2$ que está sobre D.

R. $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

31.- Halle el área de la parte del cono $z^2=x^2+y^2$ que está dentro del cilindro $r^2=4\cos 2\theta$ R. $8\sqrt{2}$

32.- Sea D la región en el primer cuadrante del plano XY que está encerrada por las gráficas $x^2=4y,\ y^2=4x,\ x+y=3,\ y=3$. Halle el área de la porción del plano $x+y+z=10$ que está sobre D. R. $\left(12-\dfrac{53\sqrt{3}}{12}\right)u^2$

5.7 INTEGRALES TRIPLES

Las definiciones de la integral doble que se dieron en la sección 5.1 se extienden fácilmente a funciones de tres o más variables independientes.

Definición 11.- Se dice que un conjunto $U\subset\mathbb{R}^3$ es acotado, cuando existe un paralelepípedo rectangular $R=[a;b]\times[c;d]\times[e;f]$, tal que $U\subset R$. El paralelepípedo R puede ser descrito como

$$R=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\ /\ a\le x\le b,\ c\le y\le d,\ e\le z\le f\}$$

Definición 12.- Una partición de R es un conjunto de la forma

$$\begin{aligned}P&=P_1\times P_2\times P_3\\&=\{[x_{i-1};x_i]\times[y_{j-1};y_j]\times[z_{k-1};z_k]\ \ 1\le i\le n,\ 1\le j\le m,\ 1\le k\le q\}\end{aligned}$$

donde $P_1=\{x_0,\dots,x_n\}$ es una partición del intervalo $[a;b]$, $P_2=\{y_0,\dots,y_m\}$ es una partición de $[c;d]$ y $P_3=\{z_0,\dots,z_q\}$ es una partición de $[e;f]$.

Observación 8.-

i) Toda partición P del paralelepípedo R, divide en nmq sub-paralelepípedos de la forma

$R_{ijk} = [x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j] \times [z_{k-1}; z_k]$, entonces

$P = \{R_{ijk} \ / \ 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m, \ \ 1 \leq k \leq q\}$

ii) El volumen de cada sub-paralelepípedo R_{ijk} para $i = 1, \dots, n, \ \ j = 1, \dots, m, \ \ k = 1, \dots, q$ se denota por

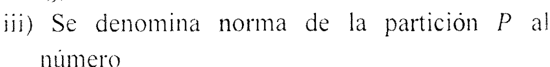
$$\Delta_{ijk}V = \Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z$$

Se verifica que

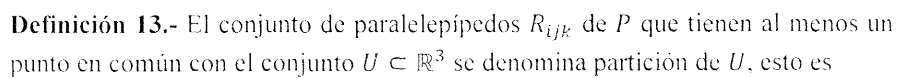
$$\sum_{i,j,k} \Delta_{ijk}V = (b-a)(d-c)(f-e)$$

Fig 5.67

iii) Se denomina norma de la partición P al número



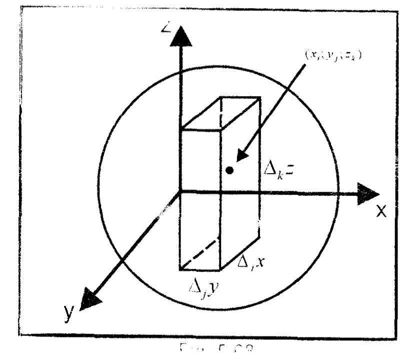
$$\|P\| = máx\{diag(R_{ijk}) \ / \ 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m, \ \ 1 \leq k \leq q\}$$



Definición 13.- El conjunto de paralelepípedos R_{ijk} de P que tienen al menos un punto en común con el conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ se denomina partición de U, esto es

$$P_U = \{R_{ijk} \ / \ R_{ijk} \cap U \neq \emptyset, \ \ 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m, \ \ 1 \leq k \leq q\}$$

FUNCIONES INTEGRABLES



Sea $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función acotada en la región cerrada y acotada U. Sea P_U una partición de U y sea $P_{ijk} = (x_i; y_j; z_k)$ un punto arbitrario escogido en $R_{ijk} \in P_U$, de modo que $f(P_{ijk})$ está bien definida, como se ilustra en la Fig. 5.68.

La Suma de Riemann de la función f asociada a la partición P_U es

$$\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_j; z_k)\Delta_{ijk}V = \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_j; z_k)\Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z$$

Definición 14.- Una función acotada $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre el conjunto acotado U, si existe un número L con la propiedad de que, dado $\varepsilon > 0, \ \ \exists \delta > 0$, tal que

$$\left|\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_j; z_k)\Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z - L\right| < \varepsilon$$

para toda partición P_U con $\|P_U\| < \delta$ y toda elección del punto $P_{ijk} \in R_{ijk}$. Este número L es llamado integral triple de f sobre U y se indica con el símbolo

$$L = \iiint_U f(x; y; z)dV = \lim_{\|P_U\|\to 0} \sum_{k=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_j; z_k)\Delta_i x \Delta_j y \Delta_k z$$

Teorema 2.- Si una función $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es continua en el conjunto cerrado y acotado U, entonces siempre existe la integral triple de f sobre U.

CÁLCULO DE INTEGRALES TRIPLES MEDIANTE INTEGRALES ITERADAS

Sea $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a \leq x \leq b, \ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ una región cerrada en el plano XY, donde $\phi_1, \phi_2: [a; b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas con

$$\phi_1(x) \leq \phi_2(x), \forall x \in [a; b]$$

Sea $\psi_1, \psi_2: [a; b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en la región cerrada D y que

$$\psi_1(x; y) \leq \psi_2(x; y), \forall (x; y) \in D$$

Fig. 5.69

Sea

$$U = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a \leq x \leq b, \ \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \ \ \psi_1(x; y) \leq z \leq \psi_2(x; y)\}$$

una región cerrada en $\mathbb{R}^3$ (Fig. 5.69)

Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es función continua en U, entonces la integral iterada de f es

$$\iiint_U f(x; y; z)dV = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x;y)}^{\psi_2(x;y)} f(x; y; z)dzdydx$$

Análogamente, podemos definir otras cuatro integrales iteradas de $f(x; y; z)$ en las que la primera integración se efectué con respecto a una variable distinta de z. Estas integrales son

1. $$\iiint_U f(x; y; z)dV = \int_e^f \int_{g(z)}^{g_2(z)} \int_{H_1(y;z)}^{H_2(y;z)} f(x; y; z)dxdydz$$

2. $$\iiint\limits_U f(x;y;z)dV = \int_c^d \int_{k_1(y)}^{k_2(y)} \int_{H_1(y;z)}^{H_2(y;z)} f(x;y;z)dxdzdy$$

3. $$\iiint\limits_U f(x;y;z)dV = \int_e^f \int_{H_1(z)}^{H_2(z)} \int_{G_1(x;z)}^{G_2(x;z)} f(x;y;z)dydxdz$$

4. $$\iiint\limits_U f(x;y;z)dV = \int_a^b \int_{k_1(x)}^{k_2(x)} \int_{G_1(x;z)}^{G_2(x;z)} f(x;y;z)dydzdx$$

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL TRIPLE

1. Si $f, g: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones integrables en el conjunto acotado U, entonces se tiene:

   a) $$\iiint\limits_U cf(x;y;z)dV = c\iiint\limits_U f(x;y;z)dV, \quad c = \text{constante}$$

   b) $$\iiint\limits_U [f(x;y;z) \pm g(x;y;z)]dV = \iiint\limits_U f(x;y;z)dV \pm \iiint\limits_U g(x;y;z)dV$$

2. Si f y g son funciones integrables en el conjunto acotado U, tal que $f(x;y;z) \geq g(x;y;z), \forall(x;y;z) \in U$, entonces

$$\iiint\limits_U f(x;y;z)dV \geq \iiint\limits_U g(x;y;z)dV$$

3. Si f es una función integrable sobre los conjuntos acotados A y B con $A \cap B = \emptyset$, entonces f es integrable sobre $A \cup B$ y

$$\iiint\limits_{A\cup B} f(x;y;z)dV = \iiint\limits_A f(x;y;z)dV + \iiint\limits_B f(x;y;z)dV$$

Ejemplo 49.- Calcule $\iiint\limits_U f(x;y;z)dV$, donde U está limitado por las superficies

$$z = 0, \quad y = 0, \quad y = x, \quad x + y = 2, \quad x + y + z = 3, \quad f(x;y;z) = 3$$

Solución

Se tiene $U = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \le z \le 3 - x - y, \ \ y \le x \le 2 - y, \ \ 0 \le y \le 1\}$
Por tanto,

$$\iiint_U f(x; y; z)dV = \int_0^1 \int_y^{2-y} \int_0^{3-x-y} 3dzdxdy = 3$$

Ejemplo 50.- Calcule $\iiint_U f(x; y; z)dV$, donde U está limitado por las superficies $z = 0, \ \ x^2 + z = 1, \ \ y^2 + z = 1, \ \ f(x; y; z) = z^2$

Solución

La región de integración es

$U = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \ -\sqrt{1-z} \le x \le \sqrt{1-z}, \ \ -\sqrt{1-z} \le y \le \sqrt{1-z}, \ \ 0 \le z \le 1\}$

Por tanto,

$$\iiint_U f(x; y; z)dV = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} z^2 dxdydz = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 51.- Calcule $\iiint_U f(x; y; z)dV$, donde U está limitado por las superficies $y^2 + z^2 = 4ax, \ \ y^2 = ax, \ \ x = 3a, \ \ f(x; y; z) = x^2$

Solución

Se tiene:

$U = \left\{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / -\sqrt{4ax - y^2} \le z \le \sqrt{4ax - y^2}, \ \ -\sqrt{ax} \le y \le \sqrt{ax}, \ \ 0 \le x \le 3a\right\}$

$$I = \iiint_U f(x; y; z)dV = \int_0^{3a} \int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} \int_{-\sqrt{4ax-y^2}}^{\sqrt{4ax-y^2}} x^2 \, dzdydx$$

$$= \int_0^{3a} \int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} 2x^2\sqrt{4ax - y^2}dydx = \int_0^{3a} \left(\frac{6\sqrt{3}\,a + 4\pi a}{3}\right) x^3 dx$$

$$= 27a^5 \left(\frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{2}\right)$$

Ejemplo 52.- Calcule la integral iterada $I = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \int_x^{\sqrt{\pi/4}} \int_2^4 \cos(6y^2) \, dzdydx$ cambiando el orden de integración.

Solución

Después de calcular la primera integral en el orden dado, nos encontramos con la integral de la forma $\int \cos(6y^2)dy$ que no es una función elemental. Para evitar el problema, cambiamos el orden de integración a $dzdxdy$ para que y sea la variable exterior. Así, la región de integración es

$$U = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \le x \le y,\ \ 0 \le y \le \sqrt{\pi/4},\ \ 2 \le z \le 4\}$$

Por consiguiente, se obtiene

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \int_0^{y} \int_2^{4} \cos(6y^2)dzdxdy = \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \int_0^{y} 2\cos(6y^2)dxdy$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/4}} 2y\cos(6y^2)dy = -\frac{1}{6}$$

EJERCICIOS

1.- Calcule las siguientes integrales iteradas

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{2y}^{1+y^2} xdzdydx$ b) $\displaystyle\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z\, dzdxdy$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_z^{\pi/2} \int_0^{xz} \cos\left(\frac{y}{z}\right) dydxdz$ d) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{y} \int_0^{\sqrt{3}z} \frac{z}{x^2+z^2} dxdzdy$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} xy\, sen\,(yz)dzdydx$ $R.\ \dfrac{\pi^3 - \pi\, sen\, \pi^2}{2}$

f) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{x+y^2} ye^z\, dzdydx$

g) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{z} \int_0^{y} xy^2z^3 dxdydz$ $R.\ \dfrac{1}{90}$ h) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{x} \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{y}{y^2+z^2} dzdydx$

i) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{y} \int_1^{x} (z^2 - y)dzdxdy$ $R.\ \dfrac{77}{120}$

j) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dzdydx$ $R.\ \dfrac{\pi a^4}{8}$

k) $\displaystyle\int_1^2 \int_x^{2x} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{2xy}} \frac{z\, dzdydx}{x^2+y^2+z^2}$ $R.\ \ln\left(\dfrac{81\sqrt{3}}{2}\right) - \dfrac{9}{4}$

l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \int_0^{4+r\, sen\,\theta} rdzdrd\theta$ m) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\sqrt{1-\cos\theta}}^{\sqrt{1+\cos\theta}} \int_{a\, senh\,(\frac{r}{a})}^{a\cosh(\frac{r}{a})} rzdzdrd\theta$

2.- En los siguientes ejercicios calcule $\displaystyle\iint_U f(x;y;z)dV$, donde U está

limitado por las superficies dadas y f es la función dada

a) $x = 0,\ \ x = \sqrt{a^2 - y^2 - z^2};\ \ f(x;y;z) = x$

$$R.\ \iiint_U f(x;y;z)dV = 4\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}} xdxdydz$$

b) $x^2 + z^2 = a^2,\ \ y^2 + z^2 = a^2;\ \ f(x;y;z) = x^2 + y^2$

c) $x = 0,\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2};\ \ f(x;y;z) = z$

$R.\ \dfrac{a^4}{840}$

d) $z = x^2 + y^2,\ \ z = 27 - 2x^2 - 2y^2;\ \ f(x;y;z) = 1\ \ R.\ \dfrac{243\pi}{2}$

3.- Calcule $\iiint_U ydV$, si U es la región acotada por el tetraedro formado por el plano $12x + 20y + 15z = 69$ y los planos coordenados R. 15/2

4.-Calcule $\iiint_U zdV$, si U es la región acotada por el tetraedro que tiene vértices $(0;0;0),\ (1;1;0),\ (1;0;0)$ y $(1;0;1)$ R. 1/24

5.- Calcule las siguientes integrales triples sobre el sólido U dado

a) $\iiint_U (x + 2y - 3z)dxdydz,$

$U = \left\{(x;y;z)\ /\ 0 \le x \le \sqrt{4 - y^2},\ \ 0 \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le 3\right\}$

b) $\iiint_U \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}\right)dV,$

$U = \left\{(x;y;z)\ /\ 0 \le x \le y^2,\ \ 0 \le y \le \sqrt{z},\ \ 0 \le z \le 1\right\}$

c) $\iiint_U e^{x+y+z}dxdydz$, U es el tetraedro con vértices $(0;0;0),\ (3;2;0),$ $(0;3;0),\ (0;0;2)$ $R.\ \dfrac{3}{5}(e^5 - 5e^3 + 5e^2 - 1)$

d) $\iiint_U \dfrac{y - 2z}{x}dxdydz$, U es la porción del espacio que, en el primer

octante, está limitado por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos $x = 1$ y $x = 4$

VOLUMEN DE UN SÓLIDO MEDIANTE INTEGRALES TRIPLES

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en la región cerrada y acotada U, tal que $f(x; y; z) = 1$, para todo $(x; y; z) \in U$. Entonces,

$$\boxed{V(U) = \iiint\limits_U dV}$$

es la medida del volumen del sólido U.

Ejemplo 53.- Encuentre el volumen del sólido limitado, por arriba, por el paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$; y, por abajo, por el plano $z = 4 - 2x$.

Solución

El sólido es

$$U = \left\{(x; y; z) \;/\; 4 - 2x \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, -\sqrt{2x - x^2} \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\right\}$$

Entonces el volumen del sólido U está dado por

$$V = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{4-2x}^{4-x^2-y^2} dzdydx = \frac{\pi}{2} u^3$$

La gráfica del sólido se ilustra en la Fig. 5.70.

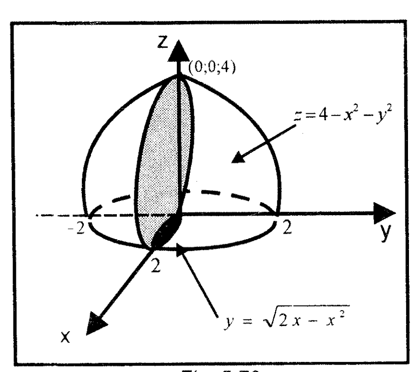


Fig. 5.70

Fig. 5.71

Ejemplo 54.- Encuentre el volumen del sólido en el primer octante acotado inferiormente por el plano XY, superiormente por el plano $z = y$, lateralmente por el cilindro $y^2 = x$, y el plano $x = 1$

Solución

Se tiene

$U = \left\{(x; y; z) \;/\; 0 \leq z \leq y, \;\; 0 \leq y \leq \sqrt{x}, \;\; 0 \leq x \leq 1\right\}$ (Ver Fig. 5.71)

Entonces, el volumen del sólido es

$$V = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^y dzdydx = \frac{1}{4}\, u^3$$

Ejemplo 55.- Calcule el volumen del sólido limitado por los planos $z = -1$, $z = 1$ y por el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Solución

El sólido U se muestra en la figura 5.72 y su proyección D sobre el plano XY en la figura 5.73.

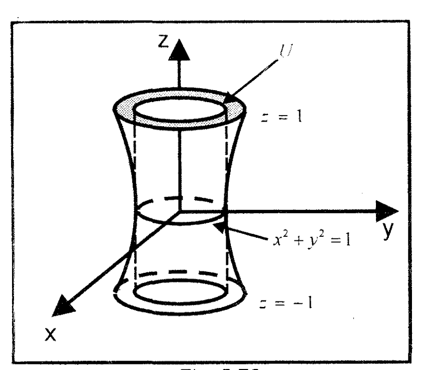


Fig 5 72

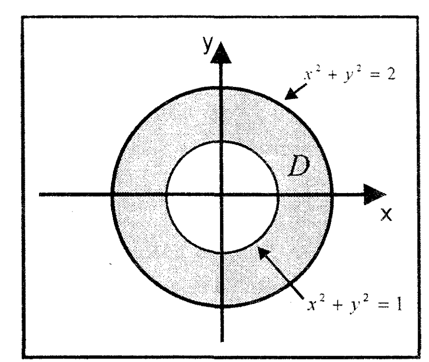


Fig 5 73

Luego,

$$V(U) = 2\left[\text{volumen del cilindro de radio 1 y altuta } 1 + \iiint_U dV\right]$$

$$= 2\left[\pi + \iint_D \int_{\sqrt{x^2+y^2-1}}^{1} dzdxdy\right] = 2\pi + 2\iint_D \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}\right) dxdy$$

Al pasar a coordenadas polares las fronteras de la región D, se tiene:

$$V(U) = 2\pi + 2\int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} (1 - \sqrt{r^2 - 1})\, rdrd\theta = \frac{8\pi}{3} u^3$$

Ejemplo 56.- Calcule el volumen del sólido interior a los cilindros $y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$ (parte mayor) debajo del plano $x + z = 5$ y por encima del plano $z = 0$.

Solución

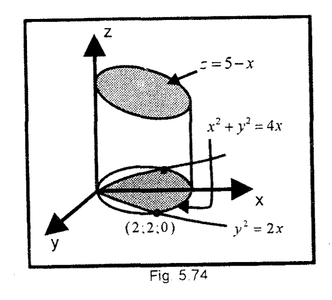


Fig 5.74

El sólido U se muestra en la figura 5.74 y está descrito por

$$U=\left\{(x;y;z)\ /\ 0\le z\le 5-x,\ \ \frac{y^2}{2}\le x\le\sqrt{4-y^2}+2,\ \ -2\le y\le 2\right\}$$

Por consiguiente, el volumen del sólido U es

$$V(U)=\int_{-2}^{2}\int_{y^2/2}^{\sqrt{4-y^2}+2}\int_{0}^{5-x}dzdxdy=\left(6\pi+\frac{224}{15}\right)u^3$$

CAMBIO DE VARIABLES EN INTEGRALES TRIPLES

Teorema 3.- Sea $T: U^*\subset\mathbb{R}^3\to U\subset\mathbb{R}^3$ una transformación continuamente diferenciable y uno a uno en U^*, donde U^* y U son regiones cerradas en $\mathbb{R}^3$. Además, supongamos que $U=T(U^*)$ y $\phi(u;v;w)=(x;y;z)$ donde

$$x=x(u;v;w),\ \ y=y(u;v;w),\ \ z=z(u;v;w)\text{ y } J(u;v;w)=\frac{\partial(x;y;z)}{\partial(u;v;w)}\neq 0$$

Sea $f: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función integrable en U. Entonces, $f\circ T: U^*\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es integrable y

$$I=\iiint_U f(x;y;z)dxdydz$$

$$=\iiint_U f(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w))\,|J(u;v;w)|dudvdw$$

Ejemplo 57.- Si se sabe que el volumen de una bola de radio 3 es $36\pi u^3$, calcule el volumen del sólido D encerrado por el elipsoide $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$

Solución

Al transformar el elipsoide $\left(\frac{x}{6}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2+\left(\frac{z}{5}\right)^2=1$ a una esfera de radio 3, se tiene:

$\frac{x}{6}=\frac{u}{3}$, de donde resulta $x=2u$

$\frac{y}{4}=\frac{v}{3}$, de donde resulta $y=\frac{4v}{3}$

$\frac{z}{5}=\frac{w}{3}$, de donde resulta $z=\frac{5w}{3}$

Así, la ecuación de la frontera D en el sistema XYZ se transforma en el sistema UVW en $u^2+v^2+w^2=9$.

Luego, el sólido $D = \left\{(x;y;z) \;/\; \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} \le 1\right\}$

resulta ser la imagen del sólido $D^* = \{(u;v;w) \in \mathbb{R}^3 \;/\; u^2 + v^2 + w^2 \le 9\}$, esto es,

$$T(D^*) = D, \text{ donde } T(u;v;w) = \left(2u; \frac{4v}{3}; \frac{5w}{3}\right)$$

El Jacobiano de la transformación de T es

$$J(u;v;w) = \frac{\partial(x;y;z)}{\partial(u;v;w)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{vmatrix} = \frac{40}{9}$$

Por consiguiente, el volumen del sólido D es

$$V = \iiint_D dV = \iiint_{D^*} \frac{40}{9} dV^* = \frac{40}{9} \iiint_{D^*} dV^* = \frac{40}{9} Vol(D^*) = \frac{40}{9}(36\pi) = 160\pi u^3$$

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Sea $T: D \subset \mathbb{R}^3 \to D^* \subset \mathbb{R}^3$ la transformación de coordenadas cilíndricas a rectangulares, esto es,

$$T(r;\theta;z) = (x;y;z) = (r\cos\theta\,; r\,sen\,\theta; z) \;\; (r \ge 0, 0 \le \theta \le 2\pi)$$

donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$, $z = z$

El Jacobiano de la transformación T está dado por

$$J(r;\theta;z) = \frac{\partial(x;y;z)}{\partial(r;\theta;z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Por consiguiente, el cambio de variable para la función $f: D^* \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ integrable en el conjunto cerrado y acotado D^* en coordenadas cilíndricas es

$$\iiint_{D^*} f(x;y;z) dV^* = \iiint_D f(r\cos\theta\,; r\,sen\,\theta; z) r\,dz\,dr\,d\theta$$

Ejemplo 58.- Halle el volumen de la poción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encuentra dentro del cilindro $r = 4\,sen\,\theta$

Solución

En coordenadas cilíndricas, la ecuación de la esfera es $z^2 = 16 - r^2$.

Luego, el volumen de la porción de la esfera que se encuentra dentro del cilindro (Fig. 5.75) es

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\,sen\,\theta}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{4\,sen\,\theta}(16-r^2)^{1/2}\,drd\theta = \frac{128}{9}(3\pi-4)u^3$$

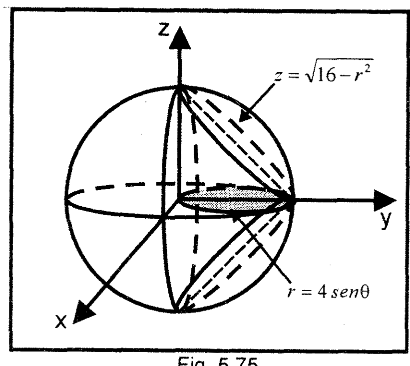


Fig. 5.75

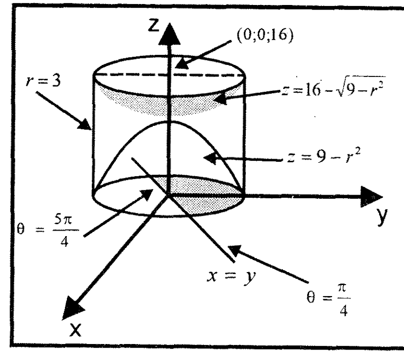


Fig. 5.76

Ejemplo 59.- Halle el volumen del sólido limitado por las superficies $x^2+y^2=9, z=9-x^2-y^2, x^2+y^2+(z-16)^2=9$ en la región $y-x\geq 0$

Solución

Al pasar a coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de las superficies son, respectivamente

$$r=3,\quad z=9-r^2,\quad (z-16)^2=9-r^2 \text{ (ver Fig. 5.76)}$$

Por consiguiente, el volumen del sólido es

$$V=\int_{\pi/4}^{5\pi/4}\int_0^3\int_{9-r^2}^{16-\sqrt{9-r^2}} rdzdrd\theta = \frac{171}{4}u^3$$

INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Sea $T: U\subset\mathbb{R}^3\to U^*\subset\mathbb{R}^3$ la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares dada por

$$T(\rho;\theta;\varphi)=(\rho\cos\theta\,sen\,\varphi;\rho\,sen\,\theta\,sen\,\varphi;\rho\cos\varphi), \text{ donde}$$

$$x=\rho\cos\theta\;sen\,\varphi,\quad y=\rho\,sen\,\theta\,sen\,\varphi,\quad z=\rho\cos\varphi$$

El Jacobiano de la transformación T está dado por

$$J(\rho;\theta;\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\theta\ sen\,\varphi & -\rho\, sen\,\theta\, sen\,\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi\\ sen\,\theta\, sen\,\varphi & \rho\cos\theta\ sen\,\varphi & \rho\, sen\,\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & 0 & -\rho\, sen\,\varphi\end{vmatrix}=-\rho^2 sen\,\varphi$$

Por tanto, el cambio de variable para la función $f\colon U^*\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ integrable en el conjunto cerrado y acotado U^* en coordenadas esféricas es

$$\iiint_{U^*} f(x;y;z)dV^*=\iiint_{U} f(\rho\cos\theta\ sen\,\varphi;\rho\, sen\,\theta\ sen\,\varphi;\rho\cos\varphi)\rho^2 sen\,\varphi\, dV$$

Ejemplo 60.- Halle el volumen del sólido sobre el cono $z^2=x^2+y^2$ e interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=2az$

Solución

Al pasar a coordenadas esféricas, las ecuaciones del cono y de la esfera son respectivamente

$$\phi=\frac{\pi}{4}\quad \text{y}\quad \rho=2a\cos\phi$$

El sólido U^* se muestra en la figura 5.77 y está descrito por

$$U^*=\left\{(\rho;\theta;\phi)\ /\ 0\le\rho\le 2a\cos\phi,.\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{4},\ \ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

Por tanto, el volumen del sólido U^* es

$$V(U^*)=\iiint_{U^*}\rho^2 sen\,\phi\ d\rho d\phi d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\rho^2 sen\,\phi\ d\rho d\phi d\theta=\pi a^3u^3$$

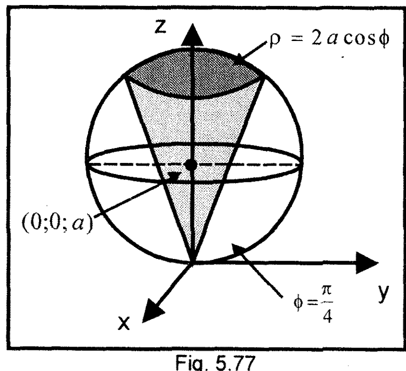


Fig. 5.77

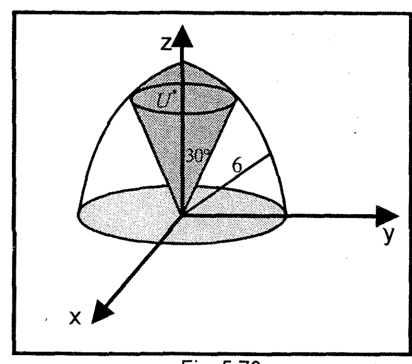


Fig. 5.78

Ejemplo 61.- Halle el volumen del cono de helado seccionado en una esfera de radio 6 por un cono con un semiángulo de 30°, tal como se indica en la Fig. 5.78.

Solución

En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es $\rho = 6$ y del cono $\phi = \frac{\pi}{6}$

El sólido U^* se muestra en la figura 5.78 y está descrito por

$$U^* = \left\{(\rho;\theta;\varphi)\ /\ 0 \leq \rho \leq 6,\ \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{6},\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

Por consiguiente, el volumen del sólido U^* viene dado por

$$V(U^*) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^{6} \rho^2\, sen\,\phi\; d\rho d\phi d\theta = 72\pi(2-\sqrt{3})u^3$$

Ejemplo 62.- Calcule $\iiint\limits_U f(x;y;z)dV$, donde $f(x,y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y U es el sólido limitado a la derecha por la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2ay\ (a>0)$ y a la izquierda por el cono $y = \sqrt{x^2+z^2}$.

Solución

En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera $x^2+(y-a)^2+z^2 = a^2$ es

$\rho = 2a\cos\varphi$, $y = \sqrt{x^2+z^2}$ es $\varphi = \frac{\pi}{4}$ y $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$, la ecuación del cono.

El sólido U^* se muestra en la figura 5.79 y está descrito por

$$U^* = \left\{(\rho;\theta;\varphi)\ /\ 0 \leq \rho \leq 2a\cos\varphi,\ \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

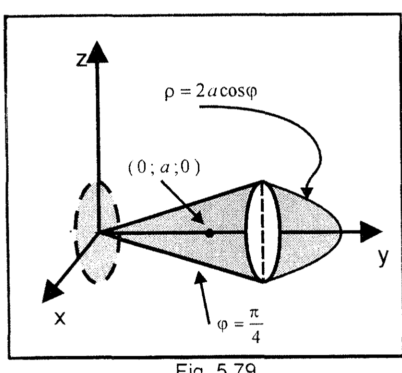


Fig. 5.79

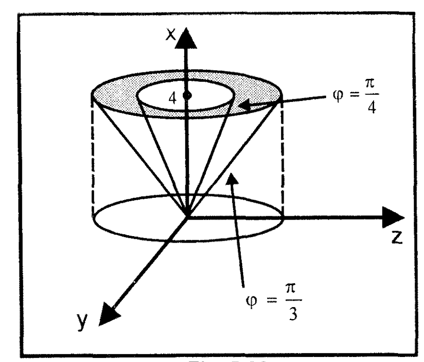


Fig. 5.80

Por tanto, la integral triple resulta

$$I = \iiint\limits_{U} f(x;y;z)dV$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\varphi} \rho^3 sen\,\varphi\; d\rho d\varphi d\theta = a^4\left(\frac{8-\sqrt{2}}{5}\right)\pi$$

Ejemplo 63.- Utilice coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido limitado por las superficies $x=\sqrt{y^2+z^2}$, $x=\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{3}}$ y el plano $x=4$

Solución

En coordenadas esféricas, la ecuación del cono $x=\sqrt{y^2+z^2}$ es $\varphi=\pi/4$, la ecuación del cono $x=\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{3}}$ $es\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}$ y del plano $x=4\ es\ \rho=4\sec\varphi$

El sólido U^* se muestra en la figura 5.80 y está descrito por

$$U^*=\left\{(\rho;\theta;\varphi)\;/\;0\le\rho\le 4\sec\varphi,\;\; \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3},\;\; 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$

Por consiguiente, el volumen del sólido está dado por

$$V(U^*)=\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_0^{4\sec\varphi}\rho^2 sen\,\varphi\; d\rho d\varphi d\theta=\frac{128\pi}{3}u^3$$

Ejemplo 64.- Sea S un sólido interior del cilindro $y^2+z^2=4$ y limitado por las superficies cilíndricas $x=z^2$ y $x-6=(z-2)^2$. Halle el volumen de S.

Solución

En coordenadas cilíndricas $y=r\cos\theta$, $z=r\,sen\,\theta$, $x=x$, la ecuación del cilindro $y^2+z^2=4$ es $r=2$, del cilindro $x=z^2$ es $x=r^2sen^2\theta$ y del cilindro $x-6=(z-2)^2$ es $x=6+(r\,sen\,\theta-2)^2$.

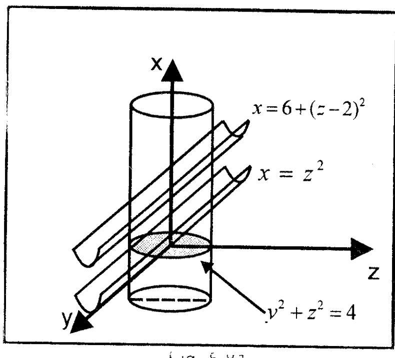


Fig. 5.81

El sólido U^* se muestra en la figura 5.81 y está descrito por

$$U^*=\{(x;r;\theta)\;/\;r^2sen^2\theta\le x\le 6+(r\,sen\,\theta-2)^2,\;\; 0\le r\le 2,\;\; 0\le\theta\le 2\pi\}$$

Por tanto, el volumen del sólido S resulta

$$V(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2sen^2\theta}^{6+(r\,sen\,\theta-2)^2} rdxdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (10r-4r^2\,sen\,\theta)drd\theta=40\pi u^3$$

Ejemplo 65.- Calcule $I=\iiint\limits_U\left[1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right]dxdydz$ donde U es el sólido encerrado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Solución

Al pasar a coordenadas esféricas, se tiene la sustitución

$$\frac{x}{a}=\rho\cos\theta\ sen\,\phi,\quad \frac{y}{b}=\rho\ sen\,\theta\ sen\,\phi,\quad \frac{z}{c}=\rho\cos\phi$$

Luego, la transformación $T: U^*\to U$ está dada por

$$T(\rho;\theta;\phi)=(x;y;z)=(a\rho\cos\theta\ sen\,\phi; b\rho sen\,\theta\ sen\,\phi; c\rho\cos\phi)$$

y el Jacobiano de la transformación T es $J(\rho;\theta;\phi)=abc\rho^2 sen\,\phi$

El sólido U^* está descrito por

$$U^*=\{(\rho;\theta;\phi)\ /\ 0\le\rho\le 1,\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le\phi\le\pi\}$$

Por tanto,

$$I=\int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(1-\rho^2)^{3/2}abc\rho^2 sen\,\phi\ d\theta d\phi d\rho=\frac{\pi^2 abc}{8}$$

Ejemplo 66.- Halle el volumen del sólido interior a las superficies $x^2+z^2=4y$, $x^2+z^2=5-y$ y exterior al cilindro $x^2+z^2=1$

Solución

En coordenadas cilíndricas $x=r\cos\theta$, $z=r\,sen\,\theta$ y $y=y$, la ecuación del paraboloide $x^2+z^2=4y$ es $y=r^2/4$, la ecuación del paraboloide $x^2+z^2=5-y$ es $y=5-r^2$ y la ecuación del cilindro $x^2+z^2=1$ es $r=1$.

Luego, el sólido S está descrito por

$$S=\left\{(r;y;\theta)\ /\ 1\le r\le 2,\ \ \frac{r^2}{4}\le y\le 5-r^2,\ \ 0\le\theta\le 2\pi\right\}\ \ \text{(Fig.5.82)}$$

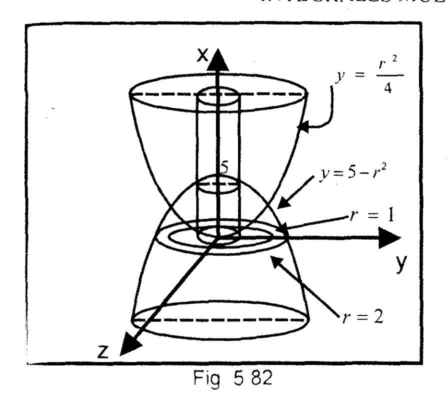


Fig 5.82

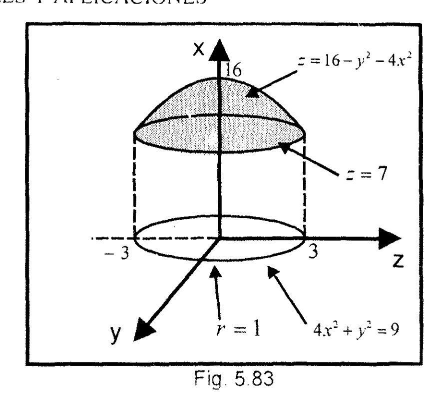


Fig. 5.83

Por tanto, el volumen del sólido S está dado por

$$V(S) = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{\frac{r^2}{4}}^{5-r^2} r\, dydrd\theta = \frac{45\pi}{8} u^3$$

Ejemplo 67.- Calcule $I = \iiint \sqrt{16 - y^2 - 4x^2} dV$ sobre el sólido S limitado superiormente por el paraboloide $z = 16 - y^2 - 4x^2$ e inferiormente por el plano $z = 7$.

Solución

La proyección de la curva intersección del paraboloide $z = 16 - y^2 - 4x^2$ con el plano $z = 7$, sobre el plano XY es

$$4x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

Al transformar a coordenadas cilindricas, se tiene

$$\frac{2x}{3} = r\cos\theta,\ \ \frac{y}{3} = r\, sen\,\theta,\ \ z = z \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} r\cos\theta,\ \ y = 3\, r\, sen\,\theta,\ \ z = z$$

Así, la transformación está dada por

$$T(r;\theta;z) = (x;y;z) = \left(\frac{3}{2} rcos\,\theta; 3r\, sen\,\theta; z\right)$$

y su Jacobiano es

$$J(r;\theta;z) = \frac{\partial(x;y;z)}{\partial(r;\theta;z)} = \frac{9}{2} r$$

El sólido S se muestra en la figura 5.83 y está descrito en coordenadas cilíndricas por

$$S = \{(r;\theta;z) \,/\, 0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \ 7 \le z \le 16 - 9r^2\}$$

Por consiguiente, se obtiene

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_7^{16-9r^2}\sqrt{16-9r^2}\,\frac{9}{2}r\,dz\,dr\,d\theta=\left(\frac{1664+196\sqrt{7}}{30}\right)\pi$$

EJERCICIOS

1.- Use coordenadas cilíndricas o esféricas para calcular la integral triple en cada caso

a) $\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, donde U es la esfera $x^2+y^2+z^2\le 1$ $\quad R.\ \frac{2\pi}{3}$

b) $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dzdydx$ $\quad R.\ \frac{\pi a^5}{20}$

c) $\int_0^h\int_0^b\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$

d) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dzdydx$ $\quad R.\ \frac{8}{9}a^2$

e) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx$ $\quad R.\ \frac{\pi}{8}$

f) $\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^x\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z(x^2+y^2)^{-1/2}\,dzdydx$ $\quad R.\ \frac{11\sqrt{2}}{48}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{24}$

g) $\iiint\limits_U (x^2+y^2)\,dxdydz$, donde U es el sólido acotado por la superficie

$x^2+y^2=2z$ y el plano $z=2$ $\quad R.\ \frac{16}{3}\pi$

h) $\iiint\limits_U e^{\frac{x^2+y^2}{z}}\,dV$, donde U es el sólido interior a la superficie $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y limitado por los planos $x+y=0, z=a, a>0$

$R.\ \frac{\pi}{2}\left(e^a(a-1)-\frac{a^2}{2}+1\right)$

Sugerencia: Use coordenadas cilíndricas

2.- Calcule $\iiint\limits_U [(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-1/2}\,dxdydz$, donde U es el

sólido esférico de radio R y centro en el origen, y $(a; b; c)$ es un punto fijo fuera de esta esfera. $R.\ \dfrac{4\pi R^3}{3}(a^2+b^2+c^2)^{-1/2}$

3.- Con ayuda de coordenadas cilíndricas o esféricas, evalúe las siguientes integrales:

a) $\iiint\limits_U (x^2+y^2+z^2)^{3/2}dV,\quad U: x^2+y^2+z^2 \le 1$ $\qquad R.\ \dfrac{2\pi}{3}$

b) $\iiint\limits_U (x^2+y^2)dV,$ U es la región entre las superficies

$x^2+y^2+z^2 \le 1,\ \ x^2+y^2 \le z^2$ $\qquad R.\ \dfrac{\pi(4\sqrt{2}-5)}{15\sqrt{2}}$

c) $\iiint\limits_U \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$ siendo U la región entre $x^2+y^2+z^2=a^2$ y

$x^2+y^2+z^2=b^2,$ donde $a > b > 0$ $\qquad R.\ 4\pi\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

d) $\iiint\limits_U xyz(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\,dxdydz,$ donde U es el primer octante

de la esfera $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ $\qquad R.\ \dfrac{a^5}{40}$

4.- Calcule $I = \iiint\limits_U (x+y+z)(x+y-z)(x-y-z)dxdydz$, donde U es el tetraedro limitado por los planos $x+y+z=0$, $x+y-z=0$, $x-y-z=0$, $2x-z=1$ $\qquad$ R. 1/180

5.- Calcule $\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$, donde U es el sólido limitado por las superficies $z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=3$ $\qquad R.\ \left(27\sqrt{2}-\dfrac{27}{2}\right)\pi$

Utilice coordenadas cilíndricas y cambie el orden de integración.

6.- Halle el volumen de la región limitado por los cilindros hiperbólicos $xy = 1$, $xy = 9$, $xz = 4$, $xz = 36$, $yz = 25$, $yz = 49$

Sugerencia: Hacer $xy = u$, $xz = v$, $yz = w$ R. $64u^3$

7.- Calcule $\iiint_U x\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, donde U es el sólido exterior al cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ y limitado por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = z + 12$, $x + y \geq 0$ R. 410,31 u^3

Sugerencia: Utilice coordenadas cilíndricas.

8.- Halle el volumen del sólido limitado superior e inferiormente por

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 9$ y lateralmente por $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ $R.$ $88\pi u^3$

Sugerencia: Primero hacer el cambio $x' = x/3$, $y' = y/2$, $z' = z$, luego pasar a coordenadas esféricas.

9.- Halle el volumen del sólido limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$

10.- Halle el volumen del sólido bajo la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$; interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y sobre el plano XY. $R.$ $\frac{7\pi}{2}u^3$

11.- Halle el volumen del sólido U limitado superiormente por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ e inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + 3y^2$

R. $4\pi u^3$

12.- Encuentre el volumen del paraboloide $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ cortado por el plano $z = c$ $R.$ $\frac{\pi abc}{2}u^3$

13.- Encuentre el volumen en el primer octante acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y = x^2$, y los planos $y = x$, $z = 0$ R. $3/35u^3$

14.- Halle los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies que se indican.

a) Por los cilindros $z = 2/x^2$, $y = 2x - x^2$ y por los planos $x = 1/2$, $x = 3/2, y = 0, z = 0$ en el primer octante. R. $(4\ln 3 - 2)u^3$

b) Por el hiperboloide de dos hojas $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 1$ y el plano $y = 4$

R. $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3}u^3$

c) Por los cilindros $x^2 = 4 - 4z$, $y^2 = 4 - 4z$ y el plano XY. R. $8u^3$

d) Por el paraboloide $z = x^2 + 2y^2$ y el cilindro $z = 4 - x^2$ R. $4\pi u^3$

e) Por encima de la superficie $\frac{z^2}{h^2} = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$ y por debajo del plano

$z = h \, con \, x^2 + y^2 \leq a^2$ R. $\frac{\pi h a^2}{3}u^3$

f) Por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = x^2 + 2y^2$ y los planos $y = x$, $y = 2x, x = 1$ R. $(7/12)\,u^3$

g) Por los cilindros $z = \ln(x + 2)$ y $z = \ln(6 - x)$ y los planos $x = 0$, $x + y = 2$ y $x - y = 2$ R. $4(4 - 3\ln 3)u^3$

h) Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z^2 = xy$ R. $(\pi/96)u^3$

i) Por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$ el plano z=0 y los cilindros $y^2 = x$, $x^2 = y$ R. 3/7 u^3

j) Por las superficies $y^2 + z^2 = 4ax$, $x = 3a$, $y^2 = ax$

R. $(6\pi + 9\sqrt{3})a^3u^3$

k) Por las superficies $y^2 = a^2 - 2z$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$

R. $V = \frac{15a^3\pi}{64}u^3$

l) Acotado por las superficies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^4} = 1$ R. $\frac{8\pi abc}{5}u^3$

m) Por el paraboloide $y^2 + z^2 = 4a(x + a)$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$

suponiendo que $c > a$ R. $2\pi a\left(c^2 - \frac{a^2}{2}\right)u^3$

n) Por la superficie $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$ R. $\frac{4\pi abc}{35}u^3$

15.- Sea U el sólido interior al cilindro $y^2 + z^2 = 4$ y limitado por las superficies cilíndricas $x = z^2, (z - 2)^2 = (x - 6)$. Halle el volumen de U R. $40\pi u^3$

16.- Calcule el volumen del sólido limitado por la superficie $\varphi = \pi/4$, y las esferas $\rho = 2$, $\rho = 6\cos\varphi$ R. $\left(\frac{65}{3} + 8\sqrt{2}\right)\pi u^3$

17.- Determine el volumen del sólido limitado por los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{9x^2 + 9y^2}$ y el plano $z = 3$ R. $8\pi u^3$

18.- Calcule el volumen del sólido encerrado entre las superficies $x^2 + z^2 = y^2$ y $x^2 + z^2 = 5y$ $R.\ \dfrac{125}{6}\pi u^3$

19.- Determine el volumen del sólido limitado por el cono $x^2 = y^2 + z^2$ y el paraboloide $x = 20 - y^2 - z^2$ $R.\ \dfrac{448}{3}\pi u^3$

20.- Calcule el volumen del sólido limitado por el hiperboloide de dos hojas $(z-1)^2 - x^2 - y^2 = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ $R.\ \dfrac{4(5\sqrt{5}-1)}{3}\pi u^3$

CENTRO DE MASA Y MOMENTOS DE INERCIA DE UN SÓLIDO

Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un sólido y $\rho: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua sobre U y que representa la densidad de U en todo punto $(x; y; z) \in U$.

1. La masa total del sólido está dada por

$$M = \iiint_U \rho(x; y; z)dV$$

2. Los momentos de masa respecto a los planos coordenados del sólido U con función de densidad $\rho: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son

$$M_{XY} = \iiint_U z\rho(x; y; z)dV, \quad M_{XZ} = \iiint_U y\rho(x; y; z)dV,$$

$$M_{YZ} = \iiint_U x\rho(x; y; z)dV$$

Por tanto, el centro de masa del sólido U es el punto $(\overline{x}; \overline{y}; \overline{z})$, donde

$$\overline{x} = \frac{M_{YZ}}{M} = \frac{\iiint_U x\rho(x; y; z)dV}{\iiint_U \rho(x; y; z)dV}, \quad \overline{y} = \frac{M_{XZ}}{M} = \frac{\iiint_U y\rho(x; y; z)dV}{\iiint_U \rho(x; y; z)dV}$$

$$\overline{z} = \frac{M_{XY}}{M} = \frac{\iiint_U z\rho(x; y; z)dV}{\iiint_U \rho(x; y; z)dV}$$

3. Los momentos de inercia del sólido U alrededor de los ejes se define como

$$I_X = \iiint_U (y^2 + z^2)\rho(x; y; z)dV$$, momento de inercia con respecto al eje X.

$$I_Y = \iiint_U (x^2 + z^2)\rho(x; y; z)dV$$, momento de inercia con respecto al eje Y.

$$I_Z = \iiint_U (x^2 + y^2)\rho(x; y; z)dV$$, momento de inercia con respecto al eje Z.

Observación 9.- Para determinar el centro de masa, es muy útil tener en cuenta todas las simetrías posibles. Estas reglas son:
i) Si U es simétrico con respecto al plano XY y $\rho(x; y; -z) = \rho(x; y; z)$, entonces $\overline{z} = 0$. Un resultado análogo se cumplen para los otros planos coordenados.
ii) Si U es simétrico respecto al eje X y $\rho(x; -y; -z) = \rho(x; y; z)$, entonces $\overline{y} = \overline{z} = 0$. Un resultado similar se cumple para los otros ejes.

Ejemplo 68.- Encuentre el centro de masa de un objeto material homogéneo limitado por los planos coordenados, el plano $x + y = 1$ y el paraboloide $z = 4 - x^2 - 4y^2$.

Solución

Como la densidad del objeto es constante, esto es, $\rho(x; y; z) = k$; entonces, la masa total del objeto está dada por

$$M = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{4-x^2-4y^2} kdzdydx = \frac{19k}{12}$$

Los momentos de masa del objeto con respecto a los planos coordenados son:

$$M_{XY} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{4-x^2-4y^2} kzdzdydx = \frac{95k}{36}$$

$$M_{XZ} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{4-x^2-4y^2} kydzdydx = \frac{9k}{20}$$

$$M_{YZ} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{4-x^2-4y^2} kxdzdydx = \frac{11k}{20}$$

Por tanto, el centro de masa del objeto es

$$(\overline{x}; \overline{y}; \overline{z}) = \left(\frac{33}{95}; \frac{27}{95}; \frac{5}{3}\right)$$

Ejemplo 69.- Encuentre el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje Z del sólido limitado por los planos coordenados y el plano

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \qquad a,b,c>0$$

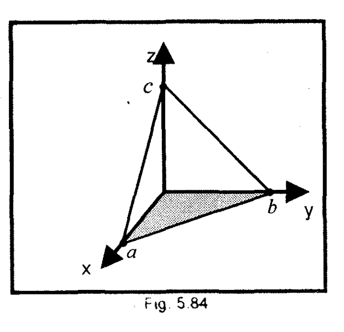


Fig. 5.84

Solución

El sólido se muestra en la figura 5.84. El momento de inercia respecto al eje Z es

$$I_Z=\int_0^a\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} k(x^2+y^2)dzdydx$$

$$=\frac{kabc}{60}(a^2+b^2)$$

y su masa total es $M=\int_0^a\int_0^{b-\frac{b}{a}x}\int_0^{c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y} kdzdydx=\frac{kabc}{6}$

Por tanto, el radio de giro está dado por

$$R=\sqrt{\frac{I_Z}{M}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{10}}$$

Ejemplo 70.- Un cuerpo está limitado por dos superficies esféricas concéntricas cuyos radios son iguales a r y R $(R>r)$. Teniendo en cuenta que la densidad del material es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de las esferas, halle la masa total del cuerpo.

Solución

Las esferas concéntricas se muestran en la figura 5.85. La densidad de volumen para cualquier punto $(x;y;z)$ de las esferas es

$$\rho(x;y;z)=\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Luego, la masa total del sólido está dada por

$$M=\iint\limits_U \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$$

En coordenadas esféricas, se tiene

$$M=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_r^R \frac{k}{\rho}\rho^2 sen\,\phi\; d\rho d\phi d\theta=2\pi(R^2-r^2)$$

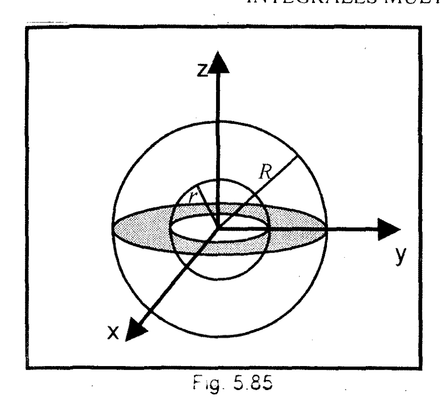


Fig. 5.85

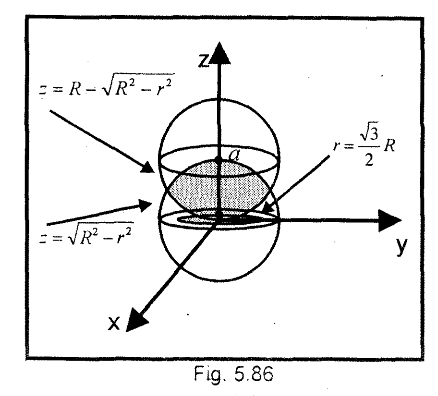


Fig. 5.86

Ejemplo 71.- Halle el momento estático de la parte común de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$ respecto al plano XY. La densidad en cualquier punto del cuerpo es igual a la distancia que media entre este punto y el plano XY.

Solución

Al pasar a coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de las esferas son

$z^2 = R^2 - r^2$ y $(z - R)^2 = R^2 - r^2$ (Ver Fig. 5.86)

La intersección de estas esferas ocurre en $z = R/2$ que proyectado sobre el plano XY tiene por ecuación $r = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) R$ (Fig.5.86)

La función de densidad en cualquier punto $(x; y; z)$ del cuerpo es

$$\rho(x; y; z) = z$$

Por tanto, el momento estático con respecto al plano XY es

$$M_{XY} = \iiint_U z\rho(x; y; z)dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} z^2 r dz dr d\theta = \frac{419}{480} R^5 \pi$$

Ejemplo 72.- Halle el momento de inercia respecto al eje Z del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$ si su función de densidad es $\rho(x; y; z) = 1$

Solución

Al usar la transformación $\frac{x}{a} = \rho \cos\theta\ sen\,\phi$, $\frac{y}{b} = \rho sen\,\theta\ sen\,\phi$ y $\frac{z}{c} = \rho\cos\phi$, el sólido U (elipsoide) está descrito en coordenadas esféricas por

$$U^* = \{(\rho; \theta; \phi) \ /\ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

El Jacobiano de la transformación es $J(\rho; \theta; \phi) = -abc\rho^2 sen\,\phi$

Por tanto, el momento de inercia respecto al eje Z del elipsoide es

$$I_z = \iiint_U (x^2 + y^2)\rho(x;y;z)dV$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 abc\rho^4 (a^2cos^2\theta + b^2sen^2\theta)sen^3\phi d\rho d\phi d\theta$$
$$= \frac{4abc\pi}{15}(a^2 + b^2)$$

EJERCICIOS

1.- Encuentre el momento de inercia con respecto a un diámetro del sólido que está entre dos esferas concéntricas con radios a y $2a$. La densidad del volumen varía con el cuadrado de la distancia al centro. $R.\ \frac{56\pi a^3}{9}k$

2.- Encuentre la masa del sólido acotado por una esfera de radio a, si la densidad del volumen varía con el cuadrado de la distancia al centro. $R.\ \frac{4}{5}a^5\pi$

3.- Encuentre el centro de masa del sólido dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$. La densidad del volumen es constante

R. (0;0;1/2)

4.- En los siguientes ejercicios, halle el centro de masa del sólido que tiene la densidad dada y está limitada por las superficies que se describen:

a) $z = x;\ z = -x,\ \ y^2 = 4 - 2x;\ \ \rho =$ constante R. (8/7;0;0)

b) $z = 0,\ x^2 + z = 1,\ \ y^2 + z = 1;\ \ \rho =$ constante R. (0;0;1/3)

c) $y^2 + z^2 = 4ax,\ \ y^2 = ax,\ \ x = 3a;\ \ \rho =$ constante R. $(0;0;2a)$

d) $z^2 = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, sobre el cono $\rho =$ constante

$R.\ \left(0;0;\frac{3(2+\sqrt{2})a}{16}\right)$

e) $z^2 = x^2 + y^2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 2az$; sobre el cono $\rho = kz$ R. (0;0;9a/7)

f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, en el primer octante, $\rho =$ cte. $R.\ \left(\frac{3}{8}a;\frac{3}{8}b;\frac{3}{8}c\right)$

5.- Halle el momento de inercia respecto al eje dado, del sólido que tiene la densidad ρ y está limitado por las superficies que se describen.

a) $z = x, y^2 = 4 - 2z,\ \ \rho = cte.$, respecto al eje Z. $R.\ 32k\left(\frac{8}{27} - \frac{1}{5} + \frac{1}{21}\right)$

b) $z^2 = y^2(1-x^2)$, $y=1$, $\rho =$ cte. respecto al eje X. $R.\ \dfrac{5\pi k}{16}$

c) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$; $\rho = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ respecto del eje Z $(a<b)$ $\quad R.\ \dfrac{4\pi k(b^6-a^6)}{9}$

d) $z^2 = x^2+y^2$, $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$; $\rho = k\sqrt{x^2+y^2}$ respecto del eje Z. R. $4ka^6/9$

6.- Encuentre la masa del sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=9$, si la densidad de volumen en cualquier punto es $\rho = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ R. $65k\pi$

7.- Encuentre el centro de masa de la distribución de masa en una superficie del paraboloide hiperbólico $z=xy$, $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ con densidad $\rho = (1+x^2+y^2)^{-1/2}$ R. (1/2;1/2;1/4)

8.- Para cada uno de los siguientes sólidos elegir un sistema de coordenadas favorables y encuentre el centroide

a) Acotado superiormente por el plano $z=1$, inferiormente por el plano $z=0$ y lateralmente por la superficie $x^2+y^2=1$ R. (0;0;1/2)

b) Acotado superiormente por el plano $z=x$ e inferiormente por $z=x^2+y^2$ R. (112;0;5/12)

c) Acotado superiormente por la superficie $z^2=x^2+y^2$ e inferiormente por $z=x^2+y^2$ R. (0;4/3;10/9)

9.- Un sólido homogéneo es acotado por el plano $z=0$ y el paraboloide $b^2cx^2+a^2cy^2+a^2b^2z=a^2b^2c$

a) Encuentre su masa y su centro de masa. $R.\ \dfrac{\pi abc}{2}k,\ \left(0;0;\dfrac{c}{3}\right)$

b) Localice el centro de masa de la porción del primer octante del sólido. $R.\ \left(\dfrac{16a}{15\pi};\dfrac{16b}{15\pi};\dfrac{c}{3}\right)$

10.- Tenemos una cápsula hemisférica de radio interno a y radio externo b y se pide

a) su centro de masa $R.\ \left(\dfrac{[3(b^4-a^4)]}{[8(b^3-a^3)]};0;0\right)$

b) su momento de inercia con respecto al eje de simetría $R.\ \left(\dfrac{4\pi}{15}\right)(b^5-a^5)$

c) su momento de inercia con respecto al diámetro de la base

$R.\ \left(\frac{4\pi}{15}\right)(b^5 - a^5)$

11.- Halle la masa de la esfera de radio R, teniendo en cuenta que la densidad es proporcional al cubo de la distancia desde el centro. $R.\ \frac{2}{3}\pi k R^6$

12.- Halle la masa del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ $(z > 0)$, si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de coordenadas. $R.\ \frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right)$

13.- Halle el centro de masa del sólido homogéneo dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y bajo el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y sobre el plano XY.

$R.\ \overline{x} = \frac{9}{10},\ \overline{y} = 0,\ \overline{z} = \frac{27}{128}$

14.- Halle el centro de masa de un cubo unidad $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ si la densidad es proporcional a:

a) El cuadrado de la distancia al origen R. (7/12;7/12;7/12)

b) La distancia al plano XY R. (1/2;1/2;2/3)

c) El cuadrado de la distancia a la diagonal que une (0;0;0) y (1;1;1)

R. (1/2;1/2;1/2)

MISCELANEA

1.- En los siguientes ejercicios, calcule la integral invirtiendo el orden de integración.

a) $\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\,dydx$ $R.\ \frac{1}{4}(e^4 - 1)$

b) $\int_0^2 \int_{x/2}^1 \cos(y^2)\,dydx$

c) $\int_0^1 \int_0^{\arctan x} x\,dydx$ $R.\ \frac{\pi}{4} - 12$

2.- En los siguientes ejercicios, use coordenadas cilíndricas o esféricas para calcular la integral $\iiint_U f(x;y;z)dV$ para la función f y la región U propuesta

a) $f(x;y;z) = x^2 + y^2$, U es la región $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$,

$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ $R.\ \frac{\pi a^5}{20}$

b) $f(x;y;z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, U es la región $a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2$,

$0 \leq z^2 \leq x^2+y^2$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{2}{3}\pi(\sqrt{2}-1)(b^3-a^3)$

3.- Halle los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies que se indican al aplicar la integración doble.

a) Por el cilindro $2y^2 = x$, los planos $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{4} = 1$ y $z = 0$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{81}{5}u^3$

b) Por los cilindros $x^2+y^2 = R^2$, $z = \dfrac{x^3}{a^2}$ y el plano $z = 0$ $(x \geq 0)$

$R.\ \dfrac{4R^5}{15a^2}u^3$

c) Por el paraboloide hiperbólico $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{x}$ y los planos $x+y = 2$, $y = 0$, $z = 0$ $\qquad$ $R.\ (3/8)u^3$

d) Por el cilindro elíptico $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$

$(x \geq 0)$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{1}{3}abc\ u^3$

e) Por los cilindros $y = \ln x$, $y = ln^2 x$ y los planos $z = 0$, $x+z = 1$

R. $(3e-8)u^3$

f) Por la superficie cónica $z^2 = xy$, el cilindro $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$ y el plano $z = 0$

R. $(1/45)\,u^3$

g) Por el cilindro $x^2+y^2 = 2x$, los planos $2x-z = 0$ y $4x-z = 0$

R. $2\pi\ u^3$

h) Por el paraboloide hiperbólico $z = \dfrac{xy}{a}$, el cilindro $x^2+y^2 = ax$ y el plano

$z = 0$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{a^3}{24}u^3$

i) Por los cilindros $x^2+y^2 = x$ y $x^2+y^2 = 2x$, el paraboloide $z = x^2+y^2$ y los planos $x+y = 0$, $x-y = 0$ y $z = 0$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{15}{8}\left(\dfrac{3\pi}{8}+1\right)u^3$

4.- Si U es la región limitada por los planos $x = 1$, $x = 2$ y por los cilindros

$y^2+z^2 = 4$, $y^2+z^2 = 9$, calcule $\displaystyle\iiint_U e^x\sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz$

$R.\ \dfrac{56e^{\pi}}{3}(e-1)u^3$

5.- Se perfora un agujero circular de radio 1 a través del centro de una esfera de

radio 2. ¿Qué volumen se quita? $R.\ \left(\frac{32-14\sqrt{3}}{6}\right)\pi\,u^3$

6.- Encuentre el volumen acotado por el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=16$ y el cilindro $x^2+y^2=25$ R. $36\pi\,u^3$

7.- Encuentre el centroide del sólido acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=9$, el paraboloide $6z=18-x^2-y^2$ y el plano $z=0$ R. (0;0;3/4)

8.- La región R se encuentra en el semiplano superior del plano XY y está limitada por las parábolas $y^2=4(1-x),\ \ y^2=4(1+x)$ y el eje X. Calcule

$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, al hacer el cambio de variable $x=u^2-v^2,\ \ y=2uv$

9.- Halle el volumen del sólido limitado superiormente por el cono $z=a-\sqrt{x^2+y^2}$, inferiormente por el plano XY y lateralmente por el cilindro $x^2+y^2=ax$ $R.\ \frac{a^3}{36}(9\pi-16)u^3$

10.- Halle el volumen del sólido limitado superiormente por $x^2+y^2+z^2=25$ e inferiormente por $z=\sqrt{x^2+y^2}+1$.

6 INTEGRAL DE LINEA Y DE SUPERFICIE

6.1 INTEGRAL DE LINEA

En esta sección se generaliza el concepto de la integral simple $\int_a^b f(t)dt$ de una función f definida en el intervalo $[a;b]$ a una integral de una función definida sobre una curva C. Esta integral se llama integral de línea de f sobre dicha curva y se denota por $\int_C f$.

INTEGRAL DE LÍNEA DE PRIMERA ESPECIE

Definición 1.-

Sea $\alpha\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular, tal que $\alpha([a;b]) = C \subset \mathbb{R}^n$ es su imagen de α (Fig. 6.1).

Sea $s = l(t) = \displaystyle\int_a^t \|\alpha'(u)\|du$ la función de longitud de arco

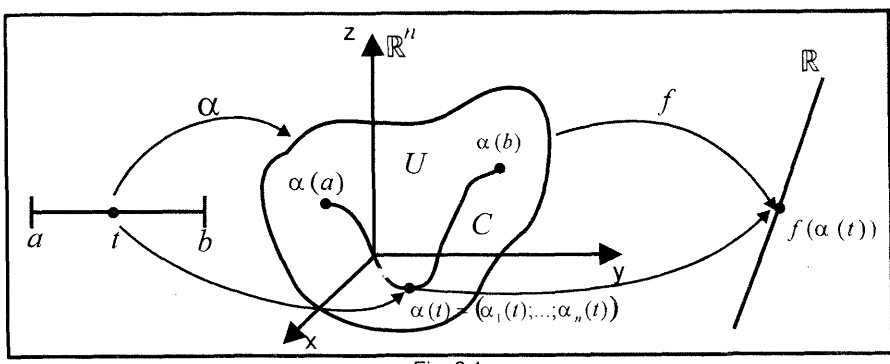


Fig. 6.1

La integral de línea de primera especie de la función f a lo largo de la curva C con respecto al parámetro longitud de arco está dada por

$$\int_C f(x_1;\dots;x_n)ds = \int_a^b f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt$$

$$= \int_a^b f\big(\alpha_1(t);\dots;\alpha_n(t)\big)\sqrt{[\alpha_1'(t)]^2 + \cdots + [\alpha_n'(t)]^2}\,dt$$

Con frecuencia, en lugar de integral de línea, también son usadas las expresiones integral curvilínea e integral de contorno.

Observación 1.- Si $f(x_1; ...; x_n) = 1$, la integral de línea proporciona la longitud de arco de la curva C, como se definió en la sección 1.7. Esto es,

$$L(C) = \int_C 1 ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[\alpha_1'(t)]^2 + \cdots + [\alpha_n'(t)]^2}\, dt$$

Observación 2.- Sea $\alpha: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular tal que $\alpha([a; b]) = C$ es su imagen en $\mathbb{R}^2$.
Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa sobre el conjunto abierto D que contiene a la curva C (ver Fig. 6.2).

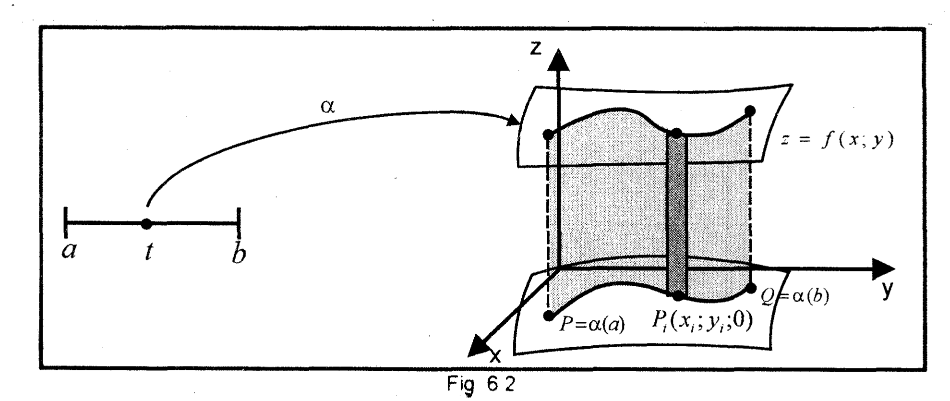


Fig 6 2

Sea P_C una partición de la curva C comprendida desde P hasta Q en trozos, de modo que la longitud de cada uno de los elementos de la partición son, respectivamente $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_i, \dots, \Delta s_n$
Sea $P_i(x_i; y_i; 0)$ un punto arbitrario en el trozo Δs_i, tal que $f(x_i; y_i)$ está bien definida. Entonces el área de la superficie lateral de la región comprendida entre la superficie $z = f(x; y)$ y la curva C es dada por

$$A(cortina) = \lim_{\|P_C\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i) \Delta s_i = \int_C f(x; y) ds$$

Por consiguiente, la integral de línea de la función f sobre la curva C desde P a Q es dada por

$$\text{Área } (cortina) = \int_C f(x; y) ds = \int_a^b f[\alpha(t)] \|\alpha'(t)\| dt$$

Ejemplo 1.- Sea C una curva que da vuelta alrededor de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en sentido contrario a las manecillas del reloj y sea $f(x; y) = 1 + x$

Calcule $\int_C f(x; y)ds$

Solución

La parametrización del círculo unitario $C: x^2 + y^2 = 1$ está dada por

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\ t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Entonces, $\alpha(t) = (\cos t\,; sen\ t)$ y $\alpha'(t) = (-sen\ t; \cos t)$

Por tanto, la integral de línea de f sobre la curva C es

$$I = \int_C f(x; y)ds = \int_0^{2\pi} f(\cos t\,; sen\ t)\|\alpha'(t)\|dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)\sqrt{(-sen\ t)^2 + cos^2 t}\ dt = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)dt = 2\pi$$

Ejemplo 2.- Calcule $\int_C xy^2 z\, ds$, donde C es la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y $x^2 + y^2 = 4$ en el primer octante.

Solución

La intersección de las superficies $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y $S_2: x^2 + y^2 = 4$, en el primer octante, es la curva

$$C: x^2 + y^2 = 4 \wedge z = 2\sqrt{3}$$

Luego, la función vectorial que tiene como imagen a esta curva C es

$$\alpha(t) = (2\cos t\,; 2\ sen\ t; 2\sqrt{3}), \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ (ver Fig.6.3)}$$

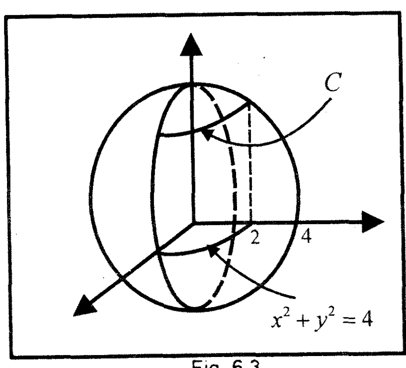


Fig. 6.3

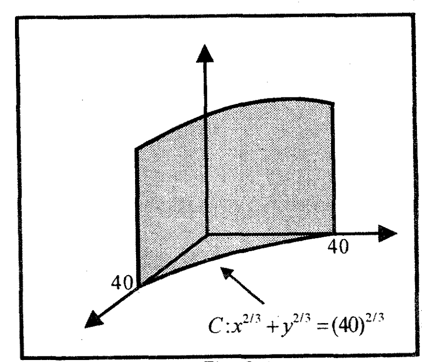


Fig. 6.4

Como $\alpha'(t) = (-2\,sen\,t; 2\cos t\,; 0)$ y $\|\alpha'(t)\| = 2$, entonces la integral de línea de la función sobre la curva C resulta

$$\int_C xy^2z\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t)\,(2\,sen\,t)^2(2\sqrt{3})\|\alpha'(t)\|dt$$

$$= 32\sqrt{3}\int_0^{\pi/2} (sen^2 t\cos t)\,dt = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo 3.- Jaimito piensa pintar una cerca de un parque por ambos lados. La cerca tiene como base la curva $C: x^{2/3} + y^{2/3} = (40)^{2/3}\ (x \geq 0, y \geq 0)$ y la altura para cada punto $(x; y) \in C$ está dada por la función $f(x; y) = 4 + \dfrac{y}{2}$. Si le proporcionan la pintura y le van a pagar S/. 100 por pintar $20\,m^2$, ¿cuál es su ganancia?

Solución

Para la curva C: $\left[\dfrac{x^{1/3}}{(40)^{1/3}}\right]^2 + \left[\dfrac{y^{1/3}}{(40)^{1/3}}\right]^2 = 1$ su parametrización es

$$C: \frac{x^{1/3}}{(40)^{1/3}} = \cos t \quad \text{y} \quad \frac{y^{1/3}}{(40)^{1/3}} = sen\ t$$

De donde resulta la función vectorial

$\alpha(t) = (40\,cos^3 t; 40\,sen^3 t),\ \ t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (Fig.6.4)

Puesto que

$\alpha'(t) = (-120\,cos^2 t\,sen\,t; 120\,sen^2 t\cos t)$ y $\|\alpha'(t)\| = 120\cos t\ sen\,t$ se sigue que

$$A(\text{cerca}) = \int_C f(x; y)ds = \int_0^{\pi/2} (4 + 20\,sen^3 t)120\cos t\ sen\,t\,dt = 720\,m^2$$

Como Jaimito debe pintar la cerca por los dos lados, entonces el área que debe pintar es $2(720) = 1440\,m^2$

Por tanto, la ganancia de Jaimito es

$$G = 5(1440) = S/.7200 \text{ (pinta cada } m^2 \text{ por } S/.5 = \frac{100}{20}\text{)}$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA

1. Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regular, tal que $\alpha([a; b]) = C \subset \mathbb{R}^n$ es su imagen de α.

   Sean $f, g: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones definidas en el conjunto abierto D que contiene a la curva C. Entonces se tiene:

a) $\int_C k\, f(x_1; \dots; x_n)ds = k \int_C f(x_1; \dots; x_n)ds$, siendo k una constante

b) $I = \int_C [f(x_1; \dots; x_n) \pm g(x_1; \dots; x_n)]ds$

$$= \int_C f(x_1; \dots; x_n)ds \pm \int_C g(x_1; \dots; x_n)ds$$

2. Si la curva C se forma uniendo los extremos de un número finito de curvas regulares $C_1, \dots, C_n$ y $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n$, entonces

$$I = \int_C f(x_1; \dots; x_n)ds = \int_{C_1} f(x_1; \dots; x_n)ds + \int_{C_2} f(x_1; \dots; x_n)ds + \cdots \int_{C_n} f(x_1; \dots; x_n)ds$$

3. Dada la curva C con una orientación determinada, se denota por $-C$ la misma curva con una orientación opuesta, y se verifica

$$\int_{-C} f(x_1; \dots; x_n)ds = -\int_C f(x_1; \dots; x_n)ds$$

4. $\int_{C\cup(-C)} f(x_1; \dots; x_n)ds = \int_C f(x_1; \dots; x_n)ds + \int_{-C} f(x_1; \dots; x_n)ds = 0$

Observación 3.- La masa de un cable de longitud L y de densidad $\delta: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está dada por

$$m = \int_C \delta(x_1; \dots; x_n)ds$$

donde C es el cable de longitud L.

Observación 4.- La parametrización de una recta $L \subset \mathbb{R}^n$ que tiene como punto inicial $A(a_1; \dots; a_n)$ y como punto final $B(b_1; \dots; b_n)$ está dada por

$$\alpha(t) = A + (B - A)t;\quad t \in [0; 1]$$

Observación 5.- Cuando la integración se realiza sobre una curva cerrada C, es costumbre denotar la integral de línea por $\oint f\, ds$

Ejemplo 4.- Calcule $\int_C (x + y)ds$ a lo largo de los caminos indicados

a) el triángulo con vértices $(0; 0)$, $(4; 0)$ y $(0; 3)$ recorrido en sentido antihorario.

b) el círculo $x^2 + y^2 = 2x$ desde $(0; 0)$ a $(2; 0)$ recorrido en sentido horario.

c) el círculo $x^2 + y^2 = 16$ desde $(4;0)$ a $(-4;0)$ recorrido en sentido antihorario.

Solución

a) El camino $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ (unión de los lados del triángulo) está representado en la figura 6.5, donde C_1, C_2 y C_3 son las imágenes de las funciones vectoriales

$$C_1: \alpha_1(t) = (0;0) + t(4;0) = (4t;0),\ t \in [0;1] \text{ y } \alpha_1'(t) = (4;0)$$
$$C_2: \alpha_2(t) = (4;0) + t(-4;3) = (4-4t;3t),\ t \in [0;1] \text{ y } \alpha_2'(t) = (-4;3)$$
$$C_3: \alpha_3(t) = (0;3) + t(0;-3) = (0;3-3t),\ t \in [0;1] \text{ y } \alpha_3'(t) = (0;-3)$$

Por consiguiente, la integral de línea sobre la curva C es

$$\int_C (x+y)ds = \int_{C_1} (x+y)ds + \int_{C_2} (x+y)ds + \int_{C_3} (x+y)ds$$
$$= \int_0^1 (4t)4\,dt + \int_0^1 (4-t)5\,dt + \int_0^1 (3-3t)3\,dt = 30$$

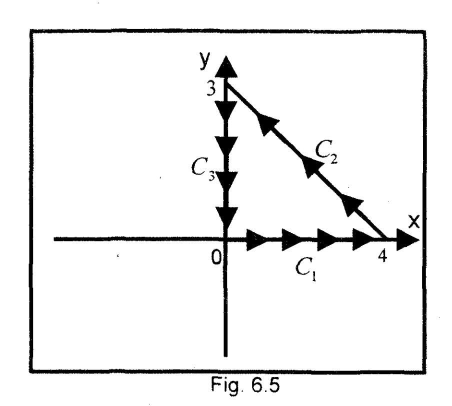


Fig. 6.5

Fig 6.6

b) Para la circunferencia $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$, la parametrización en sentido horario recorrido desde $(0;0)$ hasta $(2;0)$ es

$$C: \begin{cases} x - 1 = sen\, t \\ y = \cos t \end{cases} \Leftrightarrow C: \begin{cases} x = 1 + sen\, t \\ y = \cos t \end{cases},\quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ (Fig.6.6)}$$

Luego, la función vectorial que tiene como imagen la curva C es

$$C: \alpha(t) = (1 + sen\, t; \cos t),\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Como $\alpha'(t) = (\cos t; -sen\, t)$ y $\|\alpha'(t)\| = 1$, entonces la integral de línea sobre C es

$$\int_C (x+y)ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + sen\, t + \cos t)dt = \pi + 2$$

c) Para la circunferencia $C: x^2 + y^2 = 16$, la parametrización en sentido antihorario recorrido desde $(4; 0)$ hasta $(-4; 0)$ es

$$C: \begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\,sen\,t \end{cases}, \quad t \in [0; \pi]$$

Así, la función vectorial que representa a la curva C es

$$\alpha(t) = (4\cos t\,; 4\,sen\,t), \quad t \in [0; \pi]$$

Puesto que $\alpha'(t) = (-4\,sen\,t; 4\cos t)$ y $\|\alpha'(t)\| = 4$, entonces la integral de línea sobre C es

$$\int_C (x + y)ds = \int_0^{\pi} (4\cos t + 4\,sen\,t)4\,dt = 32$$

CAMPOS VECTORIALES

Definición 2.- Un campo vectorial en n dimensiones es una función $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $P(x_1; \dots; x_n)$ del conjunto D a un único vector

$$F(P) = (F_1(x_1; \dots; x_n); \dots; F_n(x_1; \dots; x_n))$$

con punto inicial P.

Observación 6.-

i) Para el caso $n = 2$ (en el plano, veáse Fig. 6.7), el campo vectorial es representado por

$$F(x; y) = (M(x; y); N(x; y))$$

donde M y N son funciones reales de dos variables.

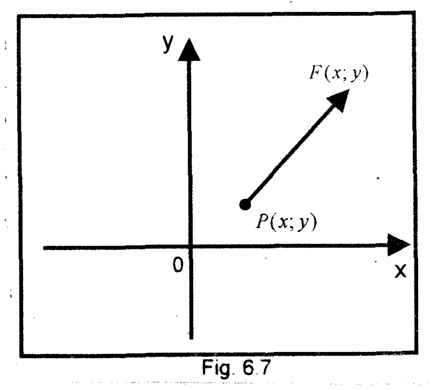


Fig. 6.7

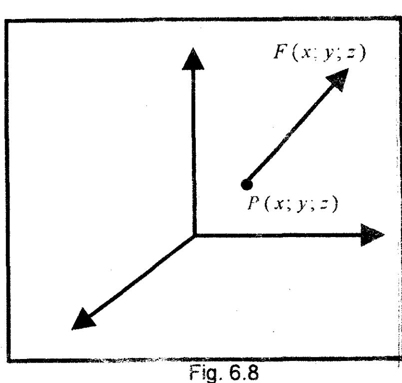


Fig. 6.8

ii) Para el caso $n = 3$ (en el espacio, veáse Fig. 6.8) el campo vectorial es representado por

$$F(x;y;z) = (P(x;y;z); Q(x;y;z); R(x;y;z))$$

donde P, Q y R son funciones reales de tres variables.

Ejemplo 5.- Dibuje una muestra representativa de vectores del campo vectorial

$$F(x;y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{\jmath}$$

Solución

Para describir un campo vectorial F se considera un punto genérico $P(x;y)$ del plano $\mathbb{R}^2$ y se define como el vector posición $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ del punto P.

Así, $F(x;y)$ es un vector unitario en la dirección del vector posición $\vec{r}$ (Fig. 6.9).

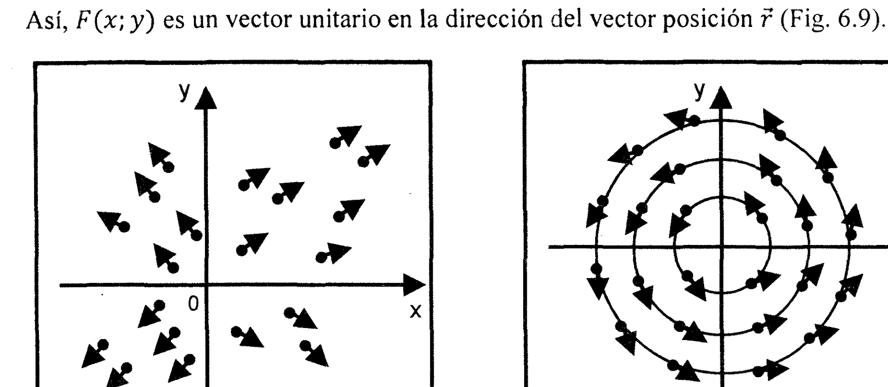


Fig. 6.9 Fig. 6.10

Ejemplo 6.- Dibuje una muestra representativa de vectores del campo vectorial

$$F(x;y) = \left(-\frac{1}{3}y; \frac{1}{3}x\right)$$

Solución

Se observa que la función $F(x;y) = \frac{1}{3}(-y;x)$ es ortogonal al vector posición $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ del punto $P(x;y)$, pues se verifica

$$F(x;y) \bullet \vec{r} = -\frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}xy = 0$$

Luego, la función $F(x;y)$ es tangente a la circunferencia de radio $\frac{1}{3}\|\vec{r}\|$ y centro en el origen, esto es,

$$\|F(x;y)\| = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{3}\|\vec{r}\|$$

Una representación gráfica del campo vectorial $F(x;y)$ se muestra en la figura 6.10.

INTEGRAL DE LÍNEA DE SEGUNDA ESPECIE

Definición 3.- Sea $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^n$ una curva seccionalmente regular, tal que $C = \alpha([a;b])$.

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial definido y acotado en la región D que contiene a la curva C.

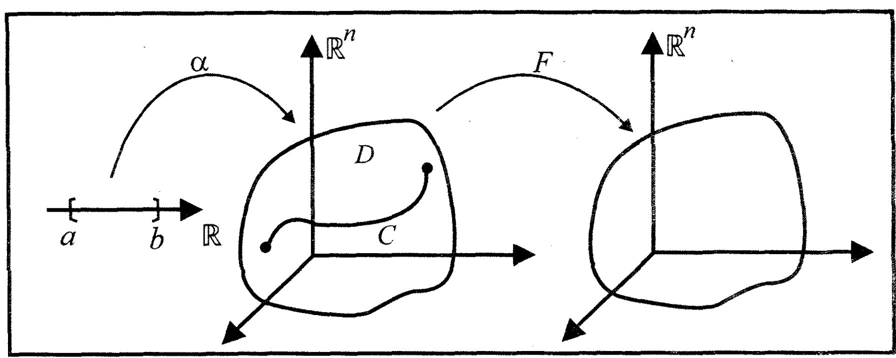


Fig. 6.11

La integral de línea del campo vectorial F a lo largo de la curva C está dada por

$$\int_C F \bullet d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$$

Observación 7.-

i) Si el campo vectorial $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es definida por $F(x;y) = (M(x;y); N(x;y))$, entonces la integral de línea de F a lo largo de la curva $C \subset D$ está dada por

$$I = \int_C [M(x;y)dx + N(x;y)dy] = \int_C F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$$

$$= \int_a^b \left[M\big(\alpha_1(t);\alpha_2(t)\big)\alpha_1'(t) + N\big(\alpha_1(t);\alpha_2(t)\big)\alpha_2'(t)\right]dt$$

ii) Si la curva regular C es $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^3$ y el campo vectorial $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es definida por

$F(x;y;z) = (P(x;y;z); Q(x;y;z); R(x;y;z))$,

entonces la integral de línea de F a lo largo de C está dada por

$$I = \int_C [P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz] = \int_a^b F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$$
$$= \int_a^b [P(\alpha_1(t);\alpha_2(t);\alpha_3(t))\alpha_1'(t) + \cdots + R(\alpha_1(t);\alpha_2(t);\alpha_3(t))\alpha_3'(t)]dt$$

Ejemplo 7.- Evaluar la integral de línea $\int_C [(3x-y)dx + (x+2y)dy]$, donde C es la imagen de la función vectorial $\alpha(t) = (\cos t\,; sen\ t),\ \ t \in [0;2\pi]$

Solución

Como $x = \cos t$ y $y = sen\ t$, se tiene $dx = -sen\ t\ dt$ y $dy = \cos t\ dt$

Por tanto, la integral de línea es

$$I = \int_C [(3x-y)dx + (x+2y)dy]$$
$$= \int_0^{2\pi} [(3\ cost - sen\ t)(-sen\ t) + (\cos t + 2\ sen\ t)(\cos t)]dt = 2\pi$$

Ejemplo 8.- Calcule

$$\int_C \left[x\left(\frac{1-x^2}{x^2+z^2}\right)^{1/2} dx + y\left(\frac{1-y^2}{y^2+z^2}\right)dy + z\left(\frac{1-z^2}{2x^2+z^2}\right)dz\right]$$

donde C es la curva de intersección de las superficies $x = y$ y $2x^2 + z^2 = 1$ en el primer octante, recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Solución

Al parametrizar la curva $C: \begin{cases} y = x \\ \left(\dfrac{x}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, se tiene

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,, y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\ , z = sen\ t,\ \ t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ \text{(Fig.6.12)}$$

De donde, se obtiene

$$dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}sen\ t\ dt,\ \ dy = -\frac{1}{\sqrt{2}}sen\ t\ dt,\ \ dz = \cos t\ dt$$

Al reemplazar estas expresiones en la integral de línea, resulta

$$I = \int_C \left[x\left(\frac{1-x^2}{x^2+z^2}\right)^{1/2} dx + y\left(\frac{1-y^2}{y^2+z^2}\right)dy + z\left(\frac{1-z^2}{2x^2+z^2}\right)dz\right]$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-sen\ t\cos t + sen\ t\cos t\ \ (1 - sen^2 t)]dt$$
$$= \int_0^{\pi/2} (-sen^3 t\cos t)dt = -\frac{1}{4}$$

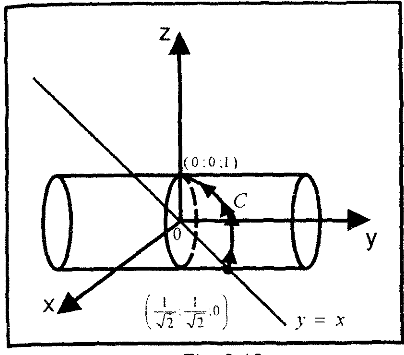


Fig 6.12

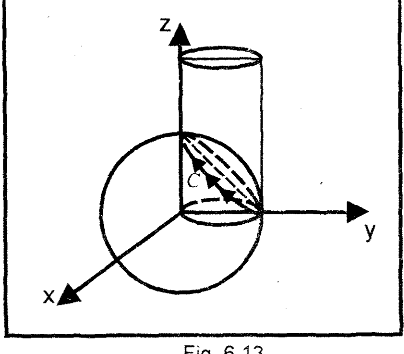


Fig 6.13

Ejemplo 9.- Calcule $\int_C (x^2; y^2; z^2) \bullet d\alpha$, donde C es la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y $x^2 + y^2 = 4y$, $z \geq 0$ recorrida en sentido horario.

Solución

Al parametrizar la curva intersección de las superficies

$$C: \begin{cases} (y-2)^2 + x^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow C: \begin{cases} \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 + \left(\frac{z}{4}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{(Fig.6.13)}$$

en sentido horario, se tiene

$$C: \begin{cases} x = 2\, sen\, t \\ y = 2(1 + \cos t) \\ z = 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} \end{cases}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

Así, la función vectorial que representa a la curva C es

$$\alpha(t) = \left(2\, sen\, t; 2(1 + \cos t); 2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\right), \quad t \in [0; 2\pi] \text{ y}$$

$$\alpha'(t) = \left(2\cos t\, ; -2\, sen\, t; \frac{\sqrt{2}\, sen\, t}{\sqrt{1 - \cos t}}\right)$$

Por tanto, la integral de línea es

$$I = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(2\, sen\, t)^2 2\cos t + 4(1 + \cos t)^2(-2\, sen\, t) + 8(1 - \cos t)\frac{\sqrt{2}\, sen\, t}{\sqrt{1 - \cos t}}\right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[8\, sen^2 t \cos t - 8(1 + \cos t)^2\, sen\, t + 8\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}\,.\,sen\, t\right] dt = 0$$

Ejemplo 10.- Calcule $\int_C F(x;y;z) \bullet d\alpha(t)$, donde $F(x;y;z) = (-yx; x^2 + z; e^{xy} + \tan(z))$ y C es la curva intersección de las superficies $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ y $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 40$ en el primer octante, recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Solución

Al parametrizar la curva de intersección de las superficies

$$C: \begin{cases} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \\ 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 49 \end{cases}$$

en sentido contrario al de las agujas del reloj, se tiene

$$C: x = 2\cos t\,,\ y = 3\ sen\ t, z = \sqrt{13},\quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ (Primer octante)}$$

Así, la función vectorial que representa a la curva C es

$$\alpha(t) = \left(2\cos t\,; 3\ sen\ t; \sqrt{13}\right),\quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\alpha'(t) = (-2\ sen\ t; 3\cos t\,; 0) \text{ y}$$

$$F\big(\alpha(t)\big) = \left(-6\ sen\ t\cos t\,; 4\ cos^2 t + 13; e^{6\ sen\ t\cos t} + \tan\left(\sqrt{13}\right)\right)$$

Por tanto, la integral de línea es

$$I = \int_C F(x;y;z) \bullet \alpha'(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[12\ sen^2 t\cos t + 12\ sen^3 t + 3\sqrt{13}\cos t\right]dt = \left(12 + 3\sqrt{13}\right)$$

INDEPENDENCIA DE TRAYECTORIA EN INTEGRALES DE LÍNEA

Una integral de línea, en general, no depende solamente del integrando y de los puntos inicial A y el final B, sino también de la curva de integración que va desde el punto inicial A hasta el punto final B (Fig. 6.14).

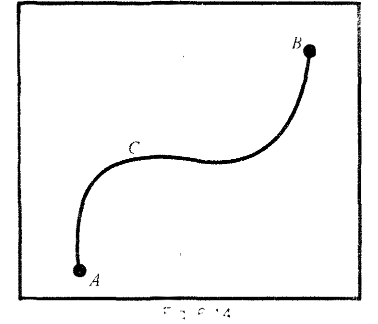


Fig. 6.14

Sin embargo, existe una clase muy importante de integrales de línea que son independientes de la trayectoria de integración. Esto ocurre cuando la forma diferencial que se pretende integrar $P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$ es exacta, es decir, existe una función $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$df(x;y;z) = P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz$$

Teorema 1.- Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular, tal que $\alpha([a; b]) = C$; y sea $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en la región D que contiene a la curva C, tal que $F(x; y; z) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$, donde $P, Q, R: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son funciones a valores reales con derivadas parciales continuas en la región D. Si la forma diferencial

$P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = F(x; y; z) \bullet d\vec{r}(d\vec{r} = (dx; dy; dz))$

es exacta, entonces existe una función $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que

i) $df(x; y; z) = P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz$

ii) $\int_C [P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz]$ depende sólo de los extremos de la trayectoria C que une los extremos

$\alpha(a) = A(x_1; y_1; z_1)$ y $\alpha(b) = B(x_2; y_2; z_2)$ y se cumple

$$\int_C F(x_1; y_1; z_1) \bullet d\vec{r} = f(x_2; y_2; z_2) - f(x_1; y_1; z_1) = f(B) - f(A)$$

Observación 8.-

a) Sean $P, Q, R: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas en la región D.

La forma diferencial $P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz$ es exacta si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \forall (x; y; z) \in D$$

b) Sean $M, N: D \subset \mathbb{R}^2 \to$R funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en D. Entonces, la forma diferencial $M(x; y)dx + N(x; y)dy$ es exacta si y solo si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \forall (x; y) \in D$$

La aplicación del teorema 1 a un campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$ se presenta en el siguiente corolario:

Corolario 1.- Sea $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^2$ una curva regular, tal que $\alpha([a; b]) = C$ y sea $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial continuo en la región D que contiene a la curva C, tal que $F(x; y) = (M(x; y); N(x; y))$, donde $M, N: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathrm{R}$ son funciones de clase C^1 en la región D.
Si la forma diferencial $M(x; y)dx + N(x; y)dy = F(x; y) \bullet d\vec{r}$ $(d\vec{r} = (dx; dy))$ es exacta, entonces existe una función $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathrm{R}$, tal que

i) $df(x; y) = M(x; y)dx + N(x; y)dy$ y

ii) $\int_C [M(x; y)dx + N(x; y)dy]$ depende solamente de los extremos de la curva C: $\alpha(a) = A(x_1; y_1)$ y $\alpha(b) = B(x_2; y_2)$ y se cumple

$$\int_C [M(x; y)dx + N(x; y)dy] = f(B) - f(A)$$

Observación 9.- Si la integral de una forma diferencial $Pdx + Qdy + Rdz$ es independiente de la trayectoria de integración, entonces la integral de esta forma diferencial sobre cualquier curva cerrada es cero. Pues una curva cerrada C puede ser considerada como la unión de dos arcos C_1 y C_2, como se ilustra en la figura 6.15 de modo que

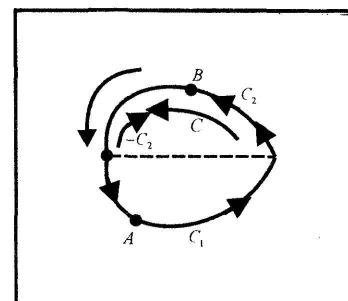


Fig. 6.15

$$\int_{C_1} [Pdx + Qdy + Rdz] = \int_{C_2} [Pdx + Qdy + Rdz]$$

Por tanto,

$$\int_C [Pdx + Qdy + Rdz] = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{C_1} - \int_{-C_2} = 0$$

En general, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.- Sean $P, Q, R: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones continuas en U, y sea C una curva regular cerrada contenida en U con una representación paramétrica $\alpha: [a; b] \to \mathbb{R}^3$, tal que $\alpha([a; b]) = C$ y $\alpha(a) = \alpha(b)$.
La forma diferencial $Pdx + Qdy + Rdz$ es exacta si y solo si

$$\int_C [Pdx + Qdy + Rdz] = 0$$

La demostración se deja al lector.

Ejemplo 11.- Calcule $\int_C (x + z; -y - z; x - y) \bullet d\vec{r}$, siendo C la curva de intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4x$

Solución

Para el campo vectorial del integrando, se tiene

$$P(x; y; z) = x + z, \quad Q(x; y; z) = -y - z, \quad R(x; y; z) = x - y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = -1 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Como la forma diferencial $P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz$ es exacta, entonces por el teorema 2, la integral de línea sobre la curva cerrada C es

$$\int_C (x + z; -y - z; x - y). d\vec{r} = \int_C [(x + z)dx - (y + z)dy + (x - y)dz] = 0$$

Ejemplo 12.- Calcule

$$I = \int_{C_1} [(y - z)dx + (x - z)dy + (y - x)dz] +$$

$$+ \int_{C_2} \left[\left(3 + 2x\, sen\left(\frac{y}{x}\right) - y cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy\right]$$

siendo C_1 el segmento de recta que va de $(1; 2; 2)$ a $(-1; 0; 2)$ y C_2 el arco de la semielipse superior $4x^2 + y^2 - 16x + 12 = 0$ que va de $(1; 0)$ a $(3; 0)$

Solución

La función vectorial que representa a la curva C_1, es

$$C_1: \alpha(t) = (1; 2; 2) + t(-2; -2; 0) = (1 - 2t; 2 - 2t; 2), \quad t \in [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow C_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

Así, se tiene $dx = -2dt,\ dy = -2dt,\ dz = 0$

Luego, la integral de línea sobre la curva C_1, es

$$I_1 = \int_{C_1} [(y - z)dx + (x - z)dy + (y - x)dz]$$

$$= \int_0^1 (-2t)(-2dt) + (-1 - 2t)(-2dt) = \int_0^1 (8t + 2)dt = 6$$

Para la segunda integral de línea sobre la curva C_2, se tiene

$$M(x; y) = 3 + 2x\, sen\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right),\quad N(x; y) = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\, sen\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Como la forma diferencial $M(x; y)dx + N(x; y)dy$ es exacta, entonces la integral de línea es independiente de la trayectoria que une los puntos $(1; 0)$ y $(3; 0)$. Luego, se puede integrar a lo largo de cualquier curva conveniente que une los puntos $(1; 0)$ y $(3; 0)$. En particular, al considerar la recta que une estos puntos, esto es, $C_2: r(t) = (1 + 2t; 0),\ t \in [0; 1]$, se tiene

$$I_2 = \int_{C_2} \left[\left(3 + 2x\, sen\left(\frac{y}{x}\right) - y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right) dx + x\cos\left(\frac{y}{x}\right) dy\right]$$

$$= \int_0^1 (3)(2dt) = \int_0^1 6dt = 6$$

Por tanto,

$$I = I_1 + I_2 = 6 + 6 = 12$$

Ejemplo 13.- Calcule $\int_C F(x; y) \bullet d\vec{r}$ siendo $F(x; y) = (e^y + ye^x; xe^y + e^x)$ y C es la curva descrita en cada caso.

i) C es el segmento de recta que va de $(a; 0)$ a $(-a; 0)$ sobre el eje X.

ii) C es la trayectoria que va de $(a; 0)$ al punto $(-a; 0)$ sobre la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

iii) C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida en sentido horario.

En cada caso fundamente su respuesta.

Solución

i) La función vectorial que representa a la recta que va de $(a; 0)$ a $(-a; 0)$ es

$$C: \alpha(t) = (a; 0) + t(-2a; 0) = (a - 2at; 0),\ t \in [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow C: \begin{cases} x = a - 2at \\ y = 0 \end{cases}, \quad t \in [0; 1]$$

Luego, la integral de línea sobre esta curva es

$$I = \int_C F(x; y) \bullet d\vec{r} = \int_C [(e^y + ye^x)dx + (xe^y + e^x)dy]$$

$$= \int_0^1 (-2a)dt = -2a$$

ii) Para la función campo vectorial F, se tiene

$$M(x; y) = e^y + ye^x, \ N(x; y) = xe^y + e^x \ \text{y} \ \frac{\partial M}{\partial y} = e^y + e^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Luego, la integral de línea sobre la curva C es independiente de la trayectoria que une los puntos $(a; 0)$ y $(-a; 0)$. Así, al integrar sobre la recta que une estos puntos resulta

$$I = \int_C F(x; y) \bullet d\vec{r} = -2a$$

iii) Como en este caso la forma diferencial es exacta y la curva C es cerrada, entonces según el teorema 2 se tiene

$$I = \int_C F(x; y) d\vec{r} = 0$$

Ejemplo 14.- Calcule $\int \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$, donde C es el arco de la curva $x = 2t, y = 2t + 1, z = t^2 + t$ que une los puntos $P_1(0; 1; 0)$ y $P_2(2; 3; 2)$

Solución

La función vectorial que representa a la curva C es

$C: \alpha(t) = (2t; 2t + 1; t^2 + t)$ con $\alpha(0) = (0; 1; 0)$ y $\alpha(1) = (2; 3; 2)$

Por consiguiente, la integral de línea es

$$I = \int_C \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2 + y^2 + z^2} = \int_0^1 \frac{2t^3 + 3t^2 + 9t + 2}{t^4 + 2t^3 + 9t^2 + 4t + 1} = \frac{1}{2}\ln(17)$$

Ejemplo 15.- Calcule $\int_\alpha \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$,

donde α es la cuarta parte de la astroide $x = R\cos^3 t, \ \ y = R\,sen^3 t$ desde el punto $(R; 0)$ hasta el punto $(0; R)$ (Fig. 6.16).

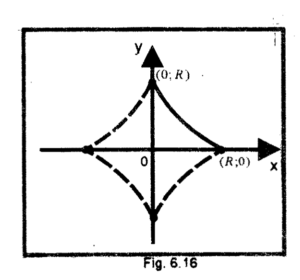


Fig. 6.16

Solución

La función vectorial que representa a la cuarta parte del astroide es

$$C: \alpha(t) = (Rcos^3t; Rsen^3t), \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Por tanto, la integral de línea es

$$I = \int_C \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3} + y^{5/3}} = \int_0^{\pi/2} \frac{3R^3sen^2tcos^7t + 3R^3sen^7tcos^2t}{R^{5/3}cos^5t + R^{5/3}sen^5t} dt$$

$$= 3R^{4/3} \int_0^{\pi/2} \frac{sen^2t\, cos^2t[cos^5t + sen^5t]}{cos^5t + sen^5t} = 3R^{4/3} \int_0^{\pi/2} sen^2t\, cos^2t\, dt$$

$$= 3R^{4/3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos(2t)}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right) dt = \frac{3R^{4/3}}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - cos^2(2t))dt$$

$$= \frac{3\pi R^{4/3}}{16}$$

Ejemplo 16.- Calcule $\displaystyle\int_{(1;1;1)}^{(4;4;4)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ a lo largo de la recta que une los puntos $(1; 1; 1)$ y $(4; 4; 4)$.

Solución

La función vectorial que representa a la recta que une los puntos $(1; 1; 1)$ y $(4; 4; 4)$ es

$$C: \alpha(t) = (1 + 3t; 1 + 3t; 1 + 3t), \quad t \in [0; 1]$$

Por tanto, la integral de línea es

$$I = \int_C \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}} = \int_0^1 \frac{9 + 27t}{\sqrt{3}(1 + 3t)} dt$$

$$= \frac{9}{\sqrt{3}} \int_0^1 dt = 3\sqrt{3}$$

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule las integrales de línea a lo largo de la trayectoria dada.

1.- $\displaystyle\int_C \left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx + \frac{2y}{4x^2 + y^2} dy\right]$; C es el arco de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ desde $(0; 0)$ a $(2; 2)$.

2.- $\displaystyle\int_C [(x^2 - 2y)dx + (2x + y^2)dy]$; C es el arco de parábola $y^2 = 4x - 1$

desde $(1/4;0)$ a $(5/4;2)$. R. 7,98

3.- $\int_C [(x+y)dx+(x-y)dy]$

a) A lo largo de los segmentos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{AB}$, donde $O(0;0)$, $A(2;0)$ y $B(2;1)$

R. 7/2

b) A lo largo del segmento OB.

4.- $\int_C [ydx+(x^2+y^2)dy]$, donde C es el arco de la circunferencia $y=\sqrt{4-x^2}$ de $(-2;0)$ a $(0;2)$ R. $\pi+8$

5.- $\int_C \left[\frac{-y}{x\sqrt{x^2-y^2}}dx+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy\right]$, C es el arco de la curva $x^2-y^2=9$ de

$(3;0)$ a $(5;4)$ R. $arcsen\ (4/5)$

6.- $\int_C y^2\, sen^3x\sqrt{1+cos^2x}\, ds$, C es el arco de la curva $y=sen\ x$ desde $(0;0)$ a $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ $R.\ \frac{64}{105}$

7.- $\int_C [y^2dx-xdy]$, C es la curva $y^2=4x$ desde $(0;0)$ a $(1;2)$ $R.\ \frac{4}{3}$

8.- $\int_C x^2dy$, a lo largo de la curva $y=x^3-3x^2+2x$ desde $(0;0)$a $(2;0)$ $R.\frac{8}{15}$

9.- $\int_C [(y-x)dx+x^2y\, dy]$, a lo largo de la curva $y^2=x^3$ desde $(1;-1)$ a

$(1;1)$ $R.\ \frac{4}{5}$

10.- $\int_C \frac{xdx+ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, C es la curva generada por la función

$\alpha(t)=\left(e^{2t}\cos(3t)\,;e^{2t}\,sen\,(3t)\right),\ \ t\in[0;2\pi]$

11.- $\int_C \frac{xy^2}{x^2+y^2}dy$, a lo largo del círculo $x^2+y^2=a^2$ en sentido antihorario

$R.\ \frac{\pi a^2}{4}$

12.- Determine $\int_{\alpha} f(x;y)ds$, si α es la curva que da vuelta en sentido contrario de las manecillas del reloj alrededor del conjunto de puntos S dado.

a) $f(x;y) = xy$; S es el triángulo formado por los ejes coordenados y la recta $x + 2y = 1$ R. $\frac{\sqrt{5}}{24}$

b) $f(x;y) = x^2 + y^2$; S es la semicurcunferencia formada por el eje X y la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ R. $\frac{16}{3} + 8\pi$

c) $f(x;y) = (x - y)^2$; S es el cuarto de circunferencia en el primer cuadrante formado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y los ejes coordenados. R. $\frac{12\pi - 8}{3}$

d) $f(x;y) = xy$, $\alpha(t) = (4\,sen\,t; 4\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$ R. 0

13.- Determine $\int_{\alpha} f(x;y;z)ds$ si la curva α recorre S una sola vez

a) $f(x;y;z) = xy + z$; S es la recta $2x + y - z = 1$, $x + y + z = 2$ entre $(-1;3;0)$ y $(1;0;1)$.

b) $f(x;y;z) = xyz$, S es la parte de la recta $x + y + z = 1$, $y - z = 0$ que se encuentra en el primer octante. R. $\frac{\sqrt{6}}{96}$

c) $f(x;y;z) = x^2yz$, α recorre la intersección de los planos coordenados con el plano $2x + y + z = 1$ R. 0

14.- En los siguientes ejercicios demuestre que el integrando es una diferencial exacta y calcule la integral.

a) $\int_C [(x^2 + 2y)dx + (2y + 2x)dy]$, C es un arco arbitrario de $(2;1)$ a $(4;2)$

R. $\frac{101}{3}$

b) $\int_C \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}dx - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}dy$, C es cualquier arco de $(4;3)$ a $(-3;4)$ que no pasa por el origen. R. $-\frac{7}{5}$

c) $\int_C [(ye^{xy}(\cos xy - sen\,xy) + \cos x)dx + (xe^{xy}(\cos xy - sen\,xy) + sen\,y)dy]$

C es un arco arbitrario de (0;0) a (3;-2) R. $sen\,3 - \cos 2 + e^{-6}\cos 6$

15.- Calcule $\int_C \sqrt{2y^2+z^2}\, ds$, donde C es la intersección de las superficies $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x=y$.

16.- Halle $\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ alrededor de la curva C

a) $C: (x-2a)^2+(y-2a)^2=a^2$ R. 0

b) $C: x^2+y^2=a^2$ R. 2π

17.- Calcule $\int_C (x-z)z\, ds$, siendo C la porción de la curva con ecuación $y=x^2$ en el plano $z=2$ que inicia en el punto $(1;1;2)$ y termina en $(2;4;2)$.

18.-Calcule $\int_\alpha [Adx+Bdy+Cdz]$ para

a) $\alpha(t)=(a\cos t\,; b\; sen\; t; t^2),\ 0\le t\le 2\pi,\ A=x+y,\ B=y+z,$ $C=z+x$ R. $2\pi^2+4\pi b-\pi ab$

b) $\alpha(t)=(at;bt^2;ct^3),\ 0\le t\le 1,\ A=x+y+z,\ B=xyz,$ $C=x^2y^2z^2$ R. $\frac{a^2}{2}+\frac{ab}{3}+\frac{ac}{4}+\frac{ab^2c}{4}+\frac{a^2b^2c^3}{5}$

19.- Calcule $\int_\alpha [ydx+zdy+xdz]$, donde α es la curva de intersección de las superficies $x^2+y^2=1$ y $z^2+y^2=1$ (en el sentido positivo trigonométrico visto desde arriba). R. π

20.- Calcule las integrales curvilíneas de las diferenciales totales

a) $\int_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ (el origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración) R. $\ln(13/5)$

b) $\int_{P_1}^{P_2} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ donde los puntos P_1 y P_2 están situados sobre las circunferencias concéntricas cuyos centros se hallan en el origen de coordenadas y los radios son iguales a R_1 y R_2, respectivamente ($R_2>R_1$) (El origen de coordenadas no se halla en el contorno de integración).

R. R_2-R_1

21.- Calcule las siguientes integrales curvilíneas:

a) $\int_{(3;0)}^{(1;2)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ a lo largo de un arco de la curva $x = 1 + 2\cos t$,

$y = 2\, sen\, t$

b) $\int_C (x^2 + 2y)dx + (y - x)dy$, donde C es la frontera de la región limitada por las gráficas de $x = 0$, $y = 0$, $2y = (x - 4)^2$, $2y = x + 2$

c) $\int_{(1;0;1)}^{(2;1;4)} (\ln x\ dx + x^2 dy + \frac{x}{z} dz)$ a lo largo de la curva de intersección de las superficies $y = x - 1$, $z = x^2$

22.- Calcule las siguientes integrales curvilíneas:

a) $\int_C xy\, ds$, donde C es el contorno del cuadrado $|x| + |y| = 2$ $\quad R.\ 0$

b) $\int_C y^2\, ds$, donde C es el primer arco de la cicloide $x = a(t - sen\, t)$,

$y = a(1 - \cos t)$ $\qquad R.\ \frac{256}{15} a^3$

c) $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, donde C es el arco de la envolvente de la circunferencia $x = a(\cos t + t\, sen\, t)$, $y = a(sen\, t - t\cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$

$R.\ \frac{a^2[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]}{3}$

d) $\int_C \left[(2x^2 e^{x^2} sen\, y + e^{x^2}\, sen\, y)dx + (xe^{x^2} \cos y - 2y^2 z)dy - \frac{2}{3} y^3 dz\right]$,

donde C es la poligonal que une los puntos $A(0;0;9)$, $B(\ln 2\,; -\pi; 6)$, $C(\ln 3\,; \pi; -3)$ y $D(\ln e\,; 2\pi; 1)$ de A a D.

R. $\sqrt{2}\, a^2$

e) $\int_C \left[x\left(\frac{1 - x^2}{x^2 + z^2}\right)^{1/2} dx + y\left(\frac{1 - y^2}{y^2 + z^2}\right)^{1/2} dy + z\left(\frac{1 - z^2}{2x^2 + z^2}\right)^{1/2} dz\right]$,

donde C está en el primer octante y es la curva de intersección del plano $x = y$ con el cilindro $2x^2 + z^2 = 1$, recorrida en el sentido antihorario.

R. $85(1^{er}\ octante), 84(1^{ro}$ y $2^{do}\ octante)$

f) $\int_{(1;1;1)}^{(3;3;3)} [(1+3z)dx - dy + 3dz)] + \int_C 2\arctan\left(\frac{y}{x}\right) dx + \ln(x^2+y^2)\, dy,$

si C es la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 1$, y el recorrido es en sentido horario.

6.2 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DE LÍNEA

1. Sea $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regular tal que $\alpha([a;b]) = C \subset \mathbb{R}^3$ y sea $f: C \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua sobre C.
   Si C es un alambre y $f(x;y;z) = 1,\ \forall(x;y;z) \in C$, entonces la longitud del alambre está dado por

$$\boxed{L = \int_C f(x;y;z)ds = \int_C ds}$$

2. Si $\rho: C \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es la función de densidad de la masa del alambre, entonces la masa del alambre recorrido por la curva C es

$$M = \int_C \rho(x;y;z)ds$$

   Luego, el centro de masa del alambre es el punto $(\bar{x};\bar{y};\bar{z})$, donde

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\rho(x;y;z;)ds}{M}, \bar{y} = \frac{\int_C y\rho(x;y;z;)ds}{M}, \bar{z} = \frac{\int_C z\rho(x;y;z;)ds}{M}$$

3. Si $d(x;y;z)$ es la distancia desde el punto $P(x;y;z)$ del alambre a una recta o plano, entonces el momento de inercia correspondiente a la curva C con función de densidad de masa $\rho: C \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está dado por

$$\int_C d^2(x;y;z)\rho(x;y;z)dz$$

   En particular, los momentos de inercia del alambre con respecto a los ejes X, Y, Z son, respectivamente

$$I_X = \int_C (y^2+z^2)\rho(x;y;z)ds, \quad I_Y = \int_C (x^2+z^2)\rho(x;y;z)ds$$

$$I_Z = \int_C (x^2+y^2)\rho(x;y;z)ds$$

TRABAJO

1. Si una partícula que se mueve a lo largo de una curva $C \subset \mathbb{R}^2$ es movida por la fuerza $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida en la región D que contiene a la curva C, tal que $F(x;y) = (M(x;y); N(x;y))$, entonces el trabajo W realizado por F a lo largo de C está dado por

$$W = \int_C F \bullet d\vec{r} = \int_C [M(x;y)dx + N(x;y)dy]$$

2. Si una partícula se mueve a lo largo de la curva $C \subset \mathbb{R}^3$ es movida por la fuerza $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x;y;z) = (P(x;y;z); Q(x;y;z); R(x;y;z))$, entonces el trabajo W realizado por la fuerza F a lo largo de C está dado por

$$W = \int_C F \bullet d\vec{r} = \int_C [P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz]$$

Ejemplo 17.- Determine la masa y la coordenada $\bar{z}$ del centro de masa de un alambre en forma de hélice descrita por la curva $\alpha(t) = (\cos t\,; sen\, t; t)$ entre $t = 0$ y $t = 2\pi$, si la densidad es $\rho(x;y;z) = x^2 + y^2 + z^2$

Solución

Como $\alpha(t) = (\cos t\,; sen\, t; t)$, $\alpha'(t) = (-sen\, t; \cos t\,; 1)$ y $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{2}$, $t \in [0; 2\pi]$, entonces la masa del alambre es

$$M = \int_C \rho(x;y;z)ds = \int_0^{2\pi} \rho(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\left(\pi + \frac{4\pi^3}{3}\right)$$

Luego, la coordenada $\bar{z}$ del centro de masa del alambre resulta

$$\bar{z} = \frac{\int_C zP(x;y;z)ds}{M} = \frac{\sqrt{2}\int_0^{2\pi} t(1 + t^2)dt}{2\sqrt{2}\,\pi\left(1 + \frac{4\pi^2}{3}\right)} = \frac{3(\pi + 2\pi^3)}{3 + 4\pi^2}$$

Ejemplo 18.- Halle el trabajo realizado por el campo de fuerza $F(x;y) = (y^2; x)$ al mover una partícula desde (0;0) hasta (2;0) a lo largo de la curva C descrita por el conjunto $S = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = 1 - |1 - x|\}$

Solución

La curva $C = C_1 \cup C_2$ se muestra en la figura 6.17. Las funciones vectoriales que representan a las curvas C_1 y C_2 son, respectivamente:

$$C_1: \alpha_1(t) = (t; t), \quad t \in [0; 1]$$

$$C_2: \alpha_2(t) = (1 + t; 1 - t), \quad t \in [0; 1]$$

Luego, el trabajo realizado por la fuerza F es

$$W = \int_C F(x; y) \bullet d\vec{r} = \int_C [y^2 dx + x dy]$$

$$= \int_{C_1} [y^2 dx + x dy] + \int_{C_2} [y^2 dx + x dy]$$

$$= \int_0^1 (t^2 + t) dt + \int_0^1 [(1 - t)^2 + (1 + t)(-1)] dt = -\frac{1}{3}$$

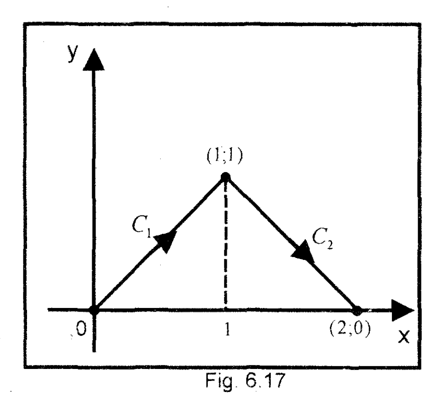


Fig. 6.17

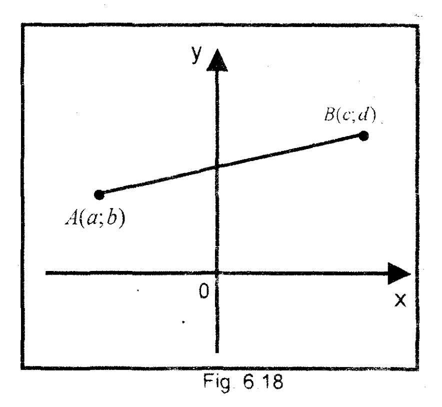


Fig. 6.18

Ejemplo 19.- Halle el trabajo realizado por el campo de fuerza

$F(x; y) = \left(-\frac{x}{x^2 + y^2}; -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ al mover una partícula a lo largo de una recta que va desde $A(a; b)$ hasta $B(c; d)$.

Solución

La función vectorial que representa a la recta que va desde A hasta B está dada por

$$C: \alpha(t) = \big(a + t(c - a): b + t(d - b)\big), \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{(Fig. 6.18)}$$

Luego, el trabajo realizado por la fuerza F a lo largo de la recta es

$$W = \int_C F(x; y; z) \bullet d\vec{r} = \int_C \left[-\frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy\right]$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{[a+t(c-a)](c-a)+[b+t(d-b)](d-b)}{[a+t(c-a)]^2+[b+t(d-b)]^2} dt \right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \ln|[a+t(c-a)]^2+[b+t(d-b)]^2| \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2} \right)$$

Ejemplo 20.- Halle la masa del arco de la curva $C: x = e^t \cos t, y = e^t sen\, t,$ $z = e^t$ desde el punto correspondiente a $t = 0$ hasta un punto cualquiera $t = t_0$, si la densidad del arco es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar, y en el punto $(1; 0; 1)$ la densidad es igual a 1.

Solución

La función vectorial que representa a la curva C y la densidad del arco son

$$C: \alpha(t) = (e^t \cos t; e^t sen\, t; e^t) \text{ y } P(x; y; z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2}$$

Dado que $P(1; 0; 1) = \frac{k}{2} = 1$, entonces $k = 2$

Luego, se tiene

$$\alpha'(t) = (e^t(\cos t - sen\, t); e^t(sen\, t + \cos t); e^t), P(x; y; z) = \frac{2}{x^2+y^2+z^2} \text{ y}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{3}\, e^t$$

Por consiguiente, la masa del arco de la curva comprendida desde $t = 0$ hasta $t = t_0$ es

$$M = \int_C \rho(x; y; z) ds = \int_0^{t_0} \rho(\alpha(t)) \|\alpha'(t)\| dt$$

$$= \int_0^{t_0} \frac{2}{2e^{2t}} . \sqrt{3}\, e^t\, dt = \sqrt{3}(1 - e^{-t_0})$$

Ejemplo 21.- Halle el momento de inercia sobre el eje Y de un alambre semicircular que tiene la forma $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, si su densidad es $\rho(x; y) = |x| + |y|$. Determine también la masa y el centro de masa del alambre.

Solución

La función vectorial que representa al semicírculo superior de $x^2 + y^2 = 1$ es

$$C: \alpha(t) = (\cos t; sen\, t), \ t \in [0; \pi] \text{ y } \|\alpha'(t)\| = 1$$

Luego, el momento de inercia del alambre con respeto al eje Y es

$$I_Y = \int_C x^2 \rho(x; y) ds = \int_0^{\pi} cos^2 t(|\cos t| + |sen\, t|) dt$$

$$I_Y = \int_0^{\pi/2} (cos^3 t + cos^2 t. sen\ t)dt + \int_{\pi/2}^{\pi} (-cos^3 t + cos^2 t\ sen\ t)dt = 2$$

La masa y las coordenadas del centro de masa del alambre son respectivamente

$$M = \int_C \rho(x; y)ds = \int_D^{\pi} (|\cos t| + |sen\ t|)dt = 4$$

$$\overline{x} = \frac{\int_C x\rho(x; y)ds}{M} = 0, \ \ \overline{y} = \frac{\int_C y\rho(x; y)ds}{M} = \frac{2+\pi}{8}$$

Ejemplo 22.- Sea $F(x; y) = \left(ye^{xy} - \frac{1}{x^2 y}; xe^{xy} - \frac{1}{xy^2}\right)$ un campo de fuerzas

Halle el trabajo que realiza F al mover una partícula desde el punto $(1; 1)$ hasta el punto $(2; 2)$ siguiendo la trayectoria compuesta por $C_1 \cup C_2 \cup C_3$, donde

C_1: es la semicircunferencia $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1, \ \ y \geq 1$

C_2: es la recta que une $(3; 1)$ con $(4; 4)$

C_3: es la recta que une $(4; 4)$ con $(2; 2)$

Solución

En el campo de fuerzas, se tiene

$$M = ye^{xy} - \frac{1}{x^2 y}, \ \ N = xe^{xy} - \frac{1}{xy^2}$$

De donde, resulta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Como la forma diferencial $M(x; y)dx + N(x; y)dy$ es exacta, entonces la integral de línea es independiente de la trayectoria que une los puntos $(1; 1)$ y $(2; 2)$.

Así, se puede integrar a lo largo de la recta que une los puntos $(1; 1)$ y $(2; 2)$, esto es,

$$C: \alpha(t) = (1; 1) + t(1; 1) = (1 + t; 1 + t), \ \ t \in [0; 1]$$

Luego, el trabajo realizado por la fuerza F a lo largo de la curva C es

$$W = \int_C F(x; y) \bullet d\alpha(t) = \int_0^1 F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$$

$$= \int_0^1 \left[2(1+t)e^{(1+t)^2} - \frac{2}{(1+t)^3}\right] dt = e^4 - e - \frac{3}{4}$$

Ejemplo 23.- Halle el trabajo realizado por la fuerza $F(x;y;z) = (y;z;x)$ al desplazar una partícula a lo largo de la curva C, intersección de las superficies $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en el sentido que vista desde encima del plano XY, es el contrario al de las agujas del reloj.

Solución

La función vectorial que representa a la curva C es

$$C: \alpha(t) = (\cos t\,; sen\ t; \cos t\ \ sen\ t),\ \ t \in [0; 2\pi]$$

De donde resulta $\alpha'(t) = (-sen\ t: \cos t\,; -sen^2 t + cos^2 t)$

Por consiguiente, el trabajo realizado por la fuerza F es

$$W = \int_C F(x;y;z) \bullet d\alpha(t) = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-sen^2 t + cos^2 t\ sen\ t - \cos t\ \ sen^2 t + cos^3 t] = -\pi$$

Ejemplo 24.- Halle el trabajo realizado por la fuerza

$F(x;y;z) = (2x - y + z; x + y - z^2; 3x - 2y + 4z)$ al desplazar una partícula alrededor de la elipse $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$, recorrida en el sentido que, vista desde encima del plano, es el contrario al de las agujas del reloj.

Solución

Al parametrizar la elipse para que la partícula recorra en sentido antihorario, se obtiene la función vectorial

$$C: \alpha(t) = (2 + 2\cos t\,; 3 + 3\ sen\ t; 0),\ \ t \in [0; 2\pi]$$

De donde resulta

$$\alpha'(t) = (-2\ sen\ t; 3\cos t\,; 0)$$

Por tanto, el trabajo realizado por la fuerza F es

$$W = \int_C F(x;y;z) \bullet d\alpha(t) = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t)) \bullet \alpha'(t)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-2\ sen\ t + \cos t\ \ sen\ t + 15\cos t + 6]dt = 12\pi$$

EJERCICIOS

1.- Un alambre se dobla en forma de la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 9,\ \ x \geq 0$. Halle la masa y el centro del alambre si

a) la densidad es una constante $c > 0$

b) la densidad es $\rho(x; y) = y$

2.- Encuentre la masa y el centro de masa de un alambre triangular formado por la recta $2x + 3y = 6$ y los ejes coordenados, si la densidad es $\rho(x; y) = x + y$

$$R.\ \sqrt{13}, \left(\frac{3}{2}; 1\right)$$

3.- Determine la masa y el centro de masa del alambre en forma de hélice que recorre la curva $\alpha(t) = (\cos t\,; sen\,t; t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; si la densidad es $\rho(x; y; z) = z$. Encuentre el momento de inercia con respecto al eje Z.

$$R.\ 2\sqrt{2}\,\pi^2, \left(0; -\frac{1}{\pi}; \frac{4\pi}{3}\right), 2\sqrt{2}\,\pi^2$$

4.- Halle la masa y el centro de masa de un alambre que tiene la forma de la hélice $C\colon \alpha(t) = (t; sen\,t; \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$; donde la densidad en cualquier punto $(x; y; z)$ del espacio $\mathbb{R}^3$ es igual al cuadrado de la distancia de dicho punto al origen de coordenadas.

5.- Un alambre tiene la forma de la curva intersección del cilindro parabólico $z = 4 - y^2$, $z \geq 0$ con el plano $x = 4 - y$. Calcule la masa del alambre si su densidad en cada punto es $\rho(x; y; z) = |y|$.

6.- Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de la curva intersección de las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y = z$, si su densidad es $\rho(x; y; z) = x^2$

7.- Un alambre tiene la forma de la curva $C\colon \begin{cases} y^2 = 4 - z\,, z \geq 0 \\ x + z = 4 \end{cases}$

Si en cada punto $(x; y; z)$ de C su densidad es $\rho(x; y; z) = |y|(x + z)$, calcule

a) la masa del alambre

b) la primera coordenada del centro de masa del alambre.

8.- Encuentre el momento de inercia de un alambre circular de densidad igual a 1 con respecto al origen, si el alambre tiene la forma de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$. R. $2\pi\sqrt{2/3}$

9.- Un alambre tiene la forma de la curva $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. La densidad del alambre es $k\sqrt{y}$. ¿Cuál es el momento de inercia del alambre con respecto al eje Y?

$$R.\ \frac{k}{4}\left[\frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{1}{15}\right]$$

10.- Halle el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x;y;z) = (1+y;x;-yz)$ para trasladar una partícula desde el punto $A(2;2;4)$ al punto $B(3;\sqrt{3};2)$ a lo largo de la curva $C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+y^2=4x \end{cases}$

11.- Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x;y;z) = (6xy^3+2z^2; 9x^2y^2; 4xz+1)$ para mover una partícula desde el punto $A(2;0;0)$ hasta el punto $B(0;0;2)$, siguiendo la curva intersección de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=4,\ z \geq 0$ y el cilindro $x^2+y^2=2x$, recorrida en sentido horario, si se observa desde el origen de coordenadas.

12.- Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$F(x;y;z) = \left(\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}; \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}; \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

para mover una partícula a lo largo de una recta que une los puntos $A(a;b;c)$ y $B(d;e;f)$ R. $(d^2+e^2+f^2)^{-1/2} - (a^2+b^2+c^2)^{-1/2}$

13.- Halle el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x;y;z) = (x;y;z)$ para mover una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto $(1;1;\sqrt{2})$ a lo largo de la intersección de las superficies $x^2+y^2=z^2,\ y^2=x$

14.- Determine el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x;y;z) = (xy;x+y)$ para desplazar una partícula desde el origen de coordenadas hasta el punto (1;1) a lo largo de

a) la recta $y=x$ R. 4/3

b) la parábola $y=x^2$ R. 17/12

15.- Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x;y;z) = (8xy^3z; 12x^2y^2z; 4x^2y^3)$ para mover una partícula desde el punto A(2;0;0) hasta el punto $B(1;\sqrt{3};\pi/3)$ a lo largo de la hélice circular $\alpha(t) = (2\cos t; 2\,sen\,t; t)$. R. $4\sqrt{5}\,\pi$

16.- Halle el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x;y;z) = (yx; xz; x(y+1))$ para mover una partícula sobre el contorno del triángulo de vértices $A(0;0;0)$, $B(2;2;-2)$ y $C(2;2;2)$, recorrida una vez y en ese orden. R. 5

17.- Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas $F(x;y;z) = (y^2; 2xy+z; y+2)$ para mover una partícula a lo largo de la curva descrita por la función $\alpha(t) = (\cos t; sen\,t; e^t)$, $t \in [0;\pi]$

18.- Sea C una curva que une los puntos $A(1;1)$ y $B(3;1)$ y

$F(x;y) = \left(\frac{x+2y}{(x+y)^2}; \frac{y}{(x+y)^2}\right)$ un campo de fuerzas. Calcule el trabajo que realiza $F(x;y)$ para mover una partícula desde el punto A hasta el punto B siguiendo la curva C.

19.- Calcule el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$F(x;y;z) = (5e^{sen\,x} - 6y + \ln(1-z)\,; 4x + e^{\cos y} + e^z; 3x^3y^4z)$$

para desplazar una partícula a lo largo de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, en sentido horario.

TEOREMA DE GREEN

Existe una relación muy importante entre las integrales dobles y las integrales de línea que a continuación se presenta. Esto concierne a las integrales de línea sobre curvas cerradas simples.
Antes de introducir este importante teorema, introducimos algunas definiciones preliminares.

Definición 4.- Una curva cerrada regular $\alpha: [a;b] \to \mathbb{R}^2$ es simple, si α es una función uno a uno, excepto en los extremos del intervalo donde $\alpha(a) = \alpha(b)$

Definición 5.- Una región $S \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, si toda curva cerrada simple α de S se puede deformar continuamente a un punto sin salirse de S (Fig. 6.19).

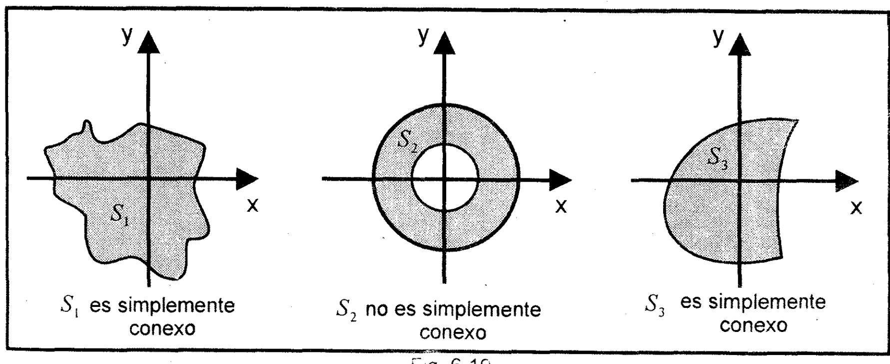


Fig 6.19

Teorema de Green.- Sea $V \subset \mathbb{R}^2$ una región abierta, $S \subset V$ una región cerrada simplemente conexa cuya frontera $FrS = C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada regular simple.

Si $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas sobre S, entonces

$$\oint_{FrS} [M(x;y)dx + N(x;y)dy] = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA \qquad (*)$$

La demostración de este teorema se deja al lector.

Observación 10.- Si $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1$, entonces el área de la región S es

$$A(S) = \oint_{FrS} [Mdx + Ndy]$$

Teorema 3.- (Integral de línea para el cálculo del área de una región). Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región limitada por un camino cerrado C, entonces el área de la región D está dada por

$$A(D) = \frac{1}{2}\oint_C [xdy - ydx]$$

Ejemplo 25.- Sea D la región interior al rectángulo de vértices $(7;4)$, $(-7;4)$, $(-7;-4)$ y $(7;-4)$ y exterior al cuadrado de vértices $(2;2)$, $(-2;2)$, $(-2;-2)$ y $(2;-2)$. Al denotar con C a la frontera de esta región, calcule la integral de línea

$$\int_C [4xydx + (2x^2 + 4x)dy]$$

Solución

Como $M = 4xy$ y $N = 2x^2 + 4x$, se tiene

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 4 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 4x$$

Al aplicar el teorema de Green a lo largo de la trayectoria $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, como se muestra en la figura 6.20, se obtiene

$$I = \int_C [4xydx + (2x^2 + 4x)dy] = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_D (4x + 4 - 4x)dA$$

$$= 4\iint_D 4(\text{área de } D) = 4(\text{área del rectángulo} - \text{área del cuadrado})$$

$$= 4(112 - 16) = 384$$

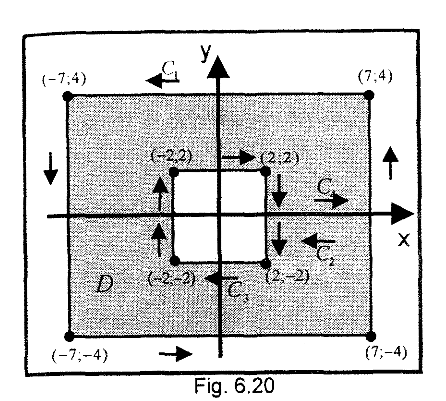


Fig. 6.20

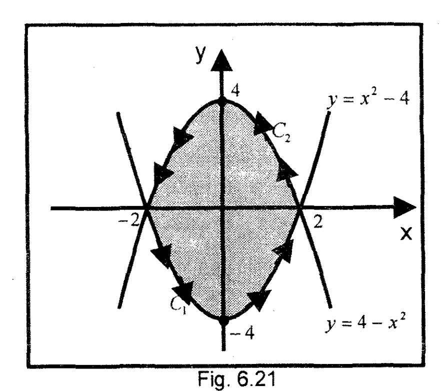


Fig. 6.21

Ejemplo 26.- Usando la integral de línea, calcule el área de la región limitada por $y = 4 - x^2$ e $y = x^2 - 4$

Solución

Las funciones vectoriales que representan a las parábolas $C_1: y = x^2 - 4$ y $C_2: y = 4 - x^2$ cuyo movimiento sobre sus trayectorias es antihoraria son:

$$C_1: \alpha_1(t) = (t; t^2 - 4), \quad t \in [-2; 2]$$

$$C_2: \alpha_2(t) = (2 - t; 4 - (2 - t)^2), \quad t \in [0; 4] \quad \text{(Fig. 6.21)}$$

Por tanto, el área de la región D es:

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{C_1 + C_2} [xdy - ydx] = \frac{1}{2}\left[\int_{C_1} (xdy - ydx) + \int_{C_2} (xdy - ydx)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2} (t(2t)(dt - (t^2 - 4)dt) + \int_0^4 [(2 - t)(2(2 - t)]dt - (4 - (2 - t)^2)(-dt)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{2} (t^2 + 4)dt + \int_0^4 (4 + (2 - t)^2)dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{64}{3} + \frac{64}{3}\right] = \frac{64}{3}u^2$$

Observación 11.- El teorema de Green puede extenderse a conjuntos más generales de manera sencilla. Supongamos que el conjunto S tiene como frontera dos curvas cerradas simples α_1 y α_2 que recorren en sentido contrario a las manecillas del reloj con relación a S. Esto significa que la región S siempre está a la izquierda cuando una partícula se mueve sobre α_1 ó α_2.
(Fig. 6.22)
Conectamos α_1 y α_2 mediante dos rectas que no se intersecan o mediante trayectorias poligonales como se muestra en la Fig. 6.22. Ahora, el conjunto S está dividido en dos conjuntos S_1 y S_2 cada uno de los cuales tienen una curva frontera cerrada simple γ_1 y γ_2, respectivamente. Entonces, según el Teorema de Green, se tiene:

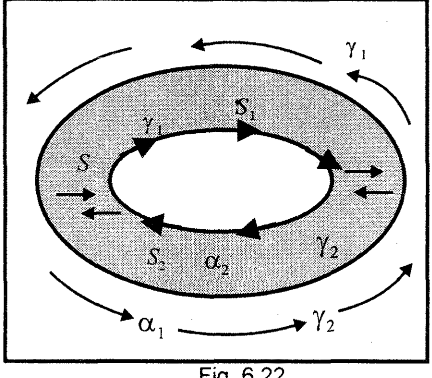


Fig. 6.22

$$\oint_{\gamma_i} (Mdx + Ndy) = \iint_{S_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA, \quad i = 1,2, \ldots \text{ Luego,}$$

$$\iint_{S} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_{\alpha_1} (Mdx + Ndy) + \oint_{\alpha_2} (Mdx + Ndy)$$

$$= \oint_{\gamma_1} (Mdx + Ndy) + \oint_{\gamma_2} (Mdx + Ndy)$$

Teorema 4.- Sea S un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^2$, tal que la frontera se recorre por un número finito de curvas cerradas simples $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.
Supongamos que cada curva α_k está orientada positivamente con respecto a S.
Si $M, N: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas en una vecindad de S, entonces

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \sum_{k=1} \oint_{\alpha_k} (M dx + N dy)$$

Ejemplo 27.- Sea S la región exterior al círculo unitario C_2 que está limitada por la izquierda por la parábola $y^2 = 4(x+4)$ y por la derecha por la recta $x = 4$. (Fig. 6.23)
Utilizando el teorema de Green, calcule

$$\int_{C_1} \left[-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy\right]$$

donde C_1 es la frontera exterior de S orientada como se muestra en la figura 6.23.

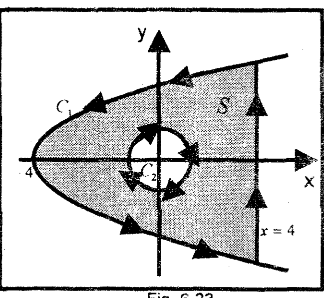


Fig. 6.23

Solución

Como $M = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ y $N = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Así, por el teorema de Green se tiene

$$\int_{C_1+C_2} \left[-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy\right] = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_S 0 dA = 0$$

Luego,

$$\int_{C_1} \left[-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy\right] = -\int_{C_2} \left[-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy\right]$$

El cual es equivalente a

$$\int_{C_1} \left[-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy\right] = \int_{-C_2} \left[-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy\right]$$

Esto indica que la curva $-C_2$ está orientada en sentido antihorario, esto es, la función vectorial que representa a esta curva es

$$-C_2: \alpha(t) = (\cos t\,; sen\, t), \quad t \in [0; 2\pi]$$

Por tanto, la integral de línea es

$$\int_{C_1}\left[-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy\right]=\int_0^{2\pi}[sen^2t+cos^2t]dt=2\pi$$

Ejemplo 28.- Calcule la integral $\int_C [(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy]$, donde C es la curva de

a) la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Fig. 6.24a)

b) la circunferencia $x^2+y^2=ax$ (Fig. 6.24b)

Solución

Como $M=xy+x+y$ y $N=xy+x-y$, se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x+1 \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x}=y+1$$

Luego, por el teorema de Green resulta

$$\int_C [(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy]=\iint_S (y-x)dA$$

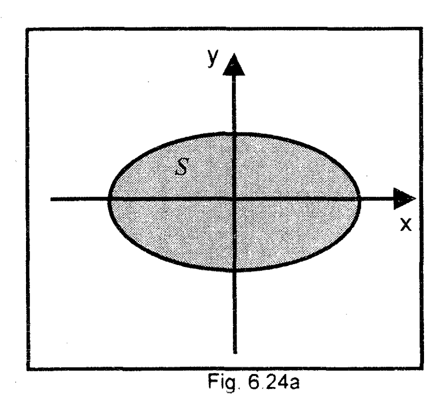


Fig. 6.24a

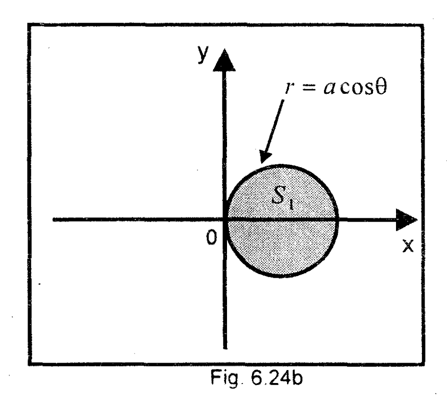


Fig. 6.24b

a) Para calcular la integral doble en coordenadas polares, se hace la transformación

$$\begin{cases}\frac{x}{a}=r\cos\theta\\ \frac{y}{b}=r\,sen\,\theta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\,sen\,\theta\end{cases},\quad J(r;\theta)=abr,$$

donde la región de integración es $S=\{(r;\theta)\ /\ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$

Por consiguiente, por el teorema de Green se obtiene:

$$I = \int_C [(xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy] = \iint_S (y - x)dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (br \, sen\, \theta - ar \cos\theta) abr \, drd\theta = 0$$

b) En coordenadas polares, la región S_1 está dada por

$$S_1 = \left\{(r;\theta) \,/\, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le a\cos\theta\right\} \quad \text{(Fig. 6.24b)}$$

Luego, por el teorema de Green se tiene:

$$I = \int_C [(xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy] = \iint_{S_1} (y - x)dA$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} (r \, sen\, \theta - r\cos\theta) r drd\theta = -\frac{a^3\pi}{8}$$

Ejemplo 29.- Valiéndose de la fórmula de Green, calcule la diferencia entre las integrales

$$I_1 = \int_{AmB} [(x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy] \quad \text{y}$$

$$I_2 = \int_{AnB} [(x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy]$$

donde AmB es un segmento de recta que une los puntos $A(0;0)$ y $B(1;1)$ y AnB es el arco de la parábola $y = x^2$.

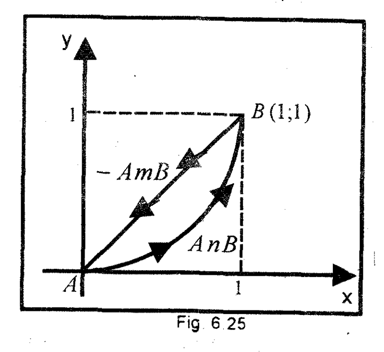


Fig 6.25

Solución

Como $M = (x + y)^2$ y $N = -(x - y)^2$, se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2(x + y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2(x - y)$$

Luego, por el teorema de Green resulta

$$I_2 - I_1 = \iint_S \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} [-2(x - y) - 2(x + y)] dydx = -\frac{1}{3}$$

Ejemplo 30.- Si Ω es la región del primer cuadrante del plano XY limitado por las curvas $4y = x$, $y = 4x$, $xy = 4$, halle el área de Ω.

Solución

Sea $Fr(\Omega) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ la frontera de la región Ω, donde las curvas $C_1: y = \frac{x}{4}$, $C_2: xy = 4$ y $C_3: y = 4x$ están representadas por las funciones vectoriales

$$C_1: \alpha_1(t) = (4t; t),\ \ t \in [0; 1]$$

$$C_2: \alpha_2(t) = \left(5 - t; \frac{4}{5-t}\right),\ \ t \in [0; 4] \qquad \text{(Fig. 6.26)}$$

$$C_3: \alpha_3(t) = (1 - t; 4(1 - t)),\ \ t \in [0; 1]$$

Por tanto, el área de la región Ω es

$$A(\Omega) = \frac{1}{2}\int_{Fr(\Omega)} [xdy - ydx]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{C_1} [xdy - ydx] + \frac{1}{2}\int_{C_2} [xdy - ydx] + \frac{1}{2}\int_{C_3} [xdy - ydx]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [4tdt - t(4dt)] + \frac{1}{2}\int_1^4 \left[\frac{4(5-t)}{(5-t)^2}dt + \frac{5}{5-t}dt\right] + \frac{1}{2}\int_0^1 [-4(1-t)dt + 4(1-t)dt]$$

$$= 4\ln 4\ u^2$$

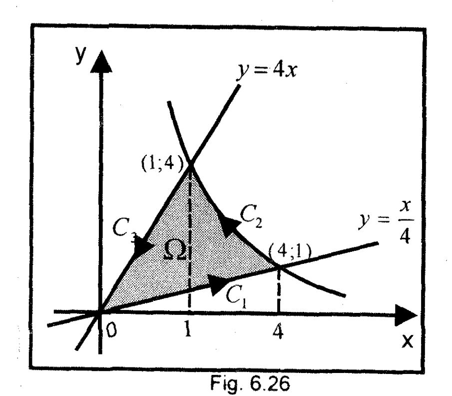


Fig. 6.26

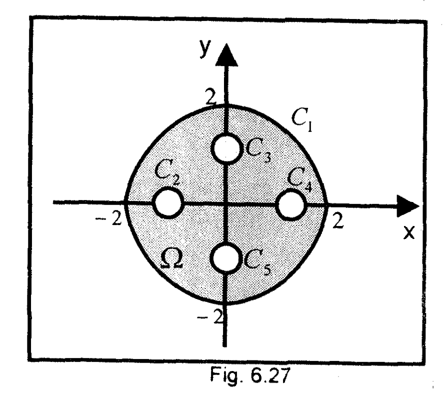


Fig. 6.27

Ejemplo 31.- Halle el área de la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y exterior a las circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$, $x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$ (Fig. 6.27)

Solución

Sea $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$, donde $C_1: x^2 + y^2 = 4$, $C_2: (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

$$C_3: (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4},\ C_4: x^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4},\ C_5: x^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4}$$

Luego, el área de la región Ω es

$$A(\Omega)=\frac{1}{2}\int_{C}[xdy-ydx]=\int_{C_1}-\int_{-C_2}-\int_{-C_3}-\int_{-C_4}-\int_{-C_5}=3\pi u^2$$

EJERCICIOS

1.- En cada uno de los siguientes ejercicios, verifique el teorema de Green

a) $M=-y,\ \ N=x,\ \ S: 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1$ R. 2

b) $M=\dfrac{2xy^3}{3}-x^2y,\ \ N=x^2y^2,\ \ S$: es el triángulo de vértices (0; 0), 1; 0) y (1; 1) R. $\dfrac{1}{4}$

c) $M=0,\ \ N=x,\ \ S$ es la región comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=4$ R. 3π

d) $M=-y,\ \ N=x,\ \ S$ es el anillo $a^2\le x^2+y^2\le b^2$, donde $0<a<b$
R. $2\pi(b^2-a^2)$

2.- En los siguientes ejercicios, utilice el teorema de Green para calcular la integral indicada.

a) $\int_C (x^2ydx+y^3dy)$, donde C es la curva cerrada formada por $y=x, y^3=x^2$ de (0;0) a (1;1) R. $-1/44$

b) $\oint_C [(2x^3-y^3)dx+(x^3+y^3)dy]$, donde C es el circulo $x^2+y^2=1$
R. $\dfrac{\pi}{2}$

c) $\int_C \left[\left(y+e^{x^2}\right)dx+(2x+\cos(y^2))dy\right]$, donde C es la curva que limita a la región comprendida entre las parábolas $y=x^2,\ \ x=y^2$.

d) $\int_C \left[\sqrt{x^2+y^2}\,dx+(xy^2+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))\right]$, donde C es la curva que limita a la región, en el primer cuadrante, comprendida entre las gráficas de las ecuaciones $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ \dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1,\ \ x=0,\ \ y=0$.

3.- Calcule las siguientes integrales de línea:

a) $\int_{(0;-1)}^{(0;1)}(y^2dx+x^2dy)$, donde C es el semicírculo $x=\sqrt{1-y^2}$ R. $\dfrac{4}{3}$

b) $\int_{(1;0)}^{(0;1)} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, donde C es la curva $x = cos^3 t, y = sen^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$R. -\frac{\pi}{2}$

c) $\oint [e^x sen\, y\, dx + e^x \cos y\ dy]$, alrededor del rectángulo con vértices (0;0), $(1;0), \left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $R.\ \frac{1}{3}$

4.- Calcule $\int_C \left[\left(3x^2 e^y - x^2 y - \frac{y^3}{3}\right) dx + (x^3 e^y + \cos y) dy\right]$ alrededor de $x^2 + y^2 = 1$ $R.\ \frac{\pi}{2}$

5.- Calcule $\int_C [(4y + e^x \cos y)dx - (y^2 + e^x\, sen\, y)dy]$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y alrededor del paralelogramo cuyos vértices son (0;0), (2;0), (3;1) y (1;1) R. -8

6.- Calcule $\int_C [(senh\, x - 1) sen\, y\, dx + (\cosh x \cos y) dy]$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, alrededor del rectángulo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $R.\ 2$

7.- Calcule $\int_C \left[2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ dx + \ln(x^2 + y^2)\ dy\right]$ alrededor de la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 1$ en sentido positivo. R. 0

8.- Calcule $\int_C [2xyz^2 dx + (x^2 z^2 + z\cos(yz)\, dy + (2x^2 yz + y\cos(yz)\, dz]$ sobre cualquier trayectoria C desde $P(0;0;1)$ hasta $Q\left(1;\frac{\pi}{4};2\right)$ $R.\ \pi + 1$

9.- Verifique el teorema de Green, para cada uno de los siguientes ejercicios

a) $M = x^2 y,\ \ N = xy^2$, donde C es la frontera de la región S en el primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = x,\ \ y^3 = x^2$ $R.\ \frac{1}{198}$

b) $M = x + y,\ \ N = x^2 y$, C es la frontera de la región S en el primer cuadrante limitada por $x = 0, y = 0, y = 1 - x^2$

c) $M = 0,\ \ N = x$, S es la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y exterior a las circunferencias $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4},\ \ (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

d) $M = 0,\ N = x$, donde S es la región interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y exterior a las circunferencias $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ y $x^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{4}$ $\quad R.\ \frac{51\pi}{4}$

10.- Calcule la siguiente integral aplicando el teorema de Green

$\int_C (x + y^2)dx + x^2y\,dy$ (en el sentido positivo) donde S es la región limitada por las curvas $y^2 = x,\ |y| = 2x - 1$

11.- Al aplicar el teorema de Green, calcule la integral $\oint_C [-x^2y\,dx + xy^2\,dy]$ donde C es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ que recorre en sentido antihorario.

$R.\ \frac{\pi a^4}{2}$

12.- Mediante el teorema de Green, halle el área de la región encerrada por las curvas dadas.

a) S es la región interior a la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

b) S encerrada por el astroide $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\,sen^3 t$ $\quad R.\ \frac{3\pi a^2}{8}$

c) S es la región más pequeña limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ y la recta $x + y = 4$ $\quad$ R. $4(\pi - 2)$

d) S limitada por la cardioide $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\,sen\,t - sen\,2t)$ $\quad$ R. $6\pi a^2$

6.4 PARAMETRIZACIÓN DE UNA SUPERFICIE

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función definida por $\phi: (u;v) = (\phi_1(u;v); \phi_2(u;v); \phi_3(u;v)), \forall (u;v) \in D$ (Fig. 6.28), donde $\phi_1, \phi_2, \phi_3: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones coordenadas de ϕ.

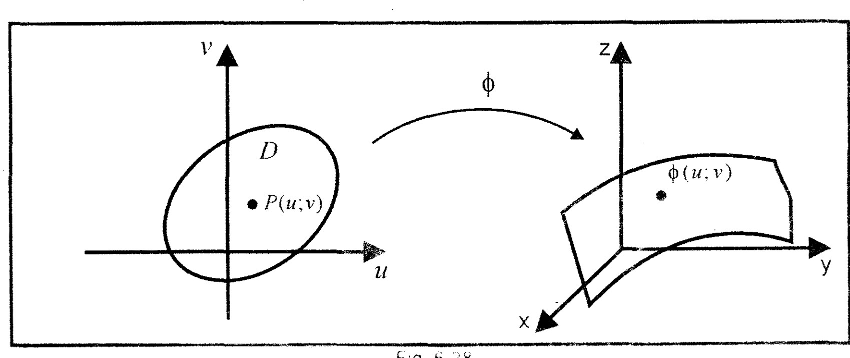


Fig. 6.28

Definición 6.- La función $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable de clase C^k $(k \geq 1)$ si sus funciones coordenadas $\phi_1, \phi_2, \phi_3: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ poseen derivadas parciales continuas hasta el orden k.

Definición 7.- Una función $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (D conjunto abierto) es una parametrización propia de $\mathbb{R}^3$, si

i) ϕ es uno a uno (inyectiva)

ii) ϕ es diferenciable de clase al menos C^2 y tal que la matriz

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_1(P)}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_2(P)}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_3(P)}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \phi_1(P)}{\partial v} & \dfrac{\partial \phi_2(P)}{\partial v} & \dfrac{\partial \phi_3(P)}{\partial v} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

es de rango 2, es decir, la matriz tiene dos filas diferentes de cero.

Ejemplo 32.- Sea $D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u^2 + v^2 < 1\}$ y $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función definida por $\phi(u; v) = (u; v; \sqrt{1 - u^2 - v^2})$. ¿ ϕ es parametrización propia de $\mathbb{R}^3$? (Fig. 6.29).

Solución

i) Para $(u; v)$ y $(u'; v')$ en D, se tiene

$$\phi(u; v) = \phi(u'; v') \Leftrightarrow (u; v; \sqrt{1 - u^2 - v^2}) = (u'; v'; \sqrt{1 - u'^2 - v'^2})$$

Por igualdad de vectores, se tiene $u = u'$, $v = v'$, entonces $(u; v) = (u'; v')$

Luego, ϕ es una función inyectiva.

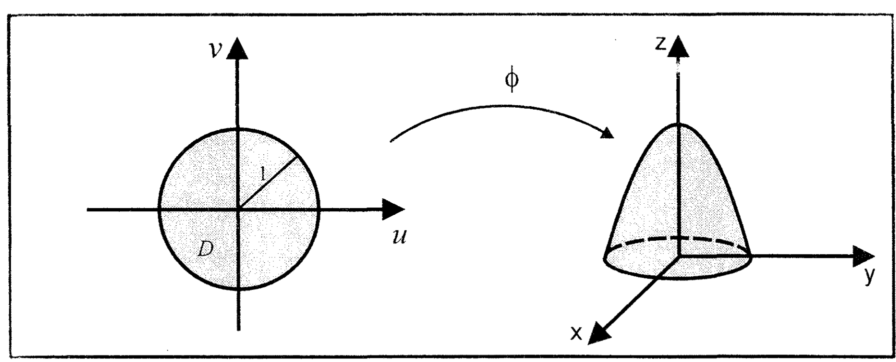


Fig. 6.29

ii) ϕ es diferenciable, $\forall (u; v) \in D$ y la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

es de rango 2, pues tiene dos filas diferentes de cero.
Por tanto, ϕ es una parametrización propia de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 33.- Sea $D = \left\{(u; v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < u < 2\pi, \ 0 < v < \frac{\pi}{2}\right\}$. La función $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(u; v) = (\cos u \ sen\ v; sen\ u\ sen\ v; \cos v)$ es una parametrización propia de $\mathbb{R}^3$ (Fig. 6.30).

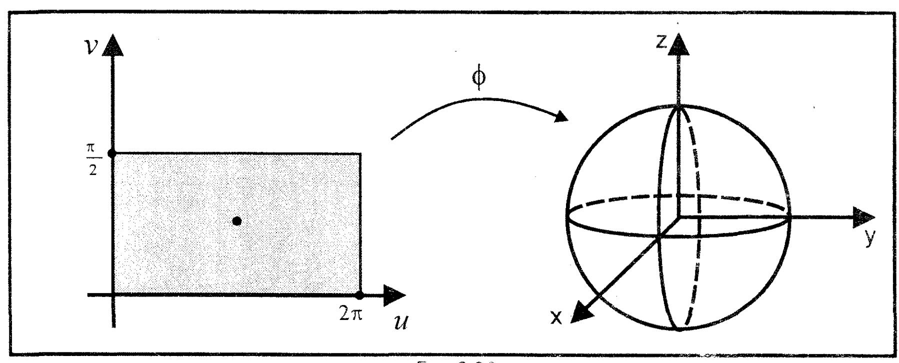


Fig. 6.30

Ejemplo 34.- Sea $D = \{(u; v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < v < 2\pi\}$ y $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una función definida por $\phi: (u; v) = (u \cos v\, ; u\ sen\ v; u)$. Pruebe que ϕ es parametrización propia de $\mathbb{R}^3$.

Solución

i) ϕ es inyectiva, pues

$$\phi(u; v) = \phi(u'; v') \Leftrightarrow (u \cos v\, ; u\ sen\ v; u) = (u' \cos v'\, ; u'\ sen\ v'; u')$$

Luego, $\begin{cases} u \cos v = u' \cos v' \\ u\ sen\ v = u' sen\ v' \\ u = u' \end{cases}$, de donde $u = u'$ y $v = v'$

ii) ϕ es diferenciable, pues sus funciones coordenadas tienen derivadas parciales continuas. Además la matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial v} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \phi_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos v & sen\ v & 1 \\ -u\ sen\ v & u \cos v & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

es de rango 2, ya que $\begin{vmatrix} \cos v & sen\, v \\ -u\, sen\, v & u \cos v \end{vmatrix} = u \neq 0$

En consecuencia ϕ es una parametrización propia de $\mathbb{R}^3$.

PARAMETRIZACIÓN PROPIA PARA SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{R}^3$

Definición 8.- Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ un subconjunto. Una función $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización propia de M, si $\phi(D) \subset M$. En este caso se escribe $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M$ (Fig. 6.31).

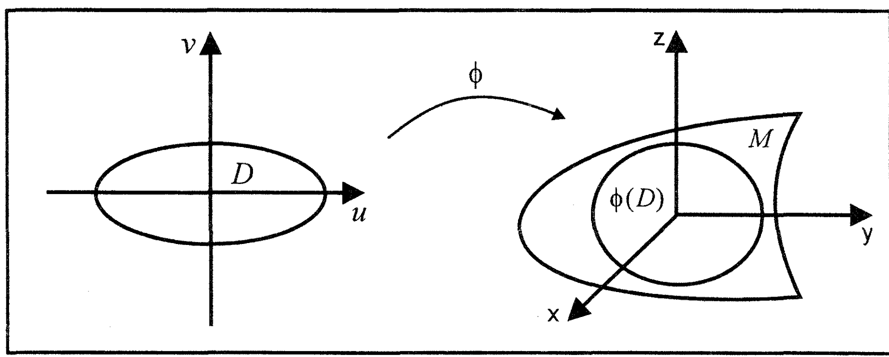


Fig. 6.31

SUPERFICIES REGULARES EN $\mathbb{R}^3$

Definición 9.- Una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad siguiente: Para cada punto $P \in M$ existe una parametrización propia de M, esto es $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M$, tal que $\phi(D)$ contiene una vecindad de $P \in M$ (Fig. 6.32).

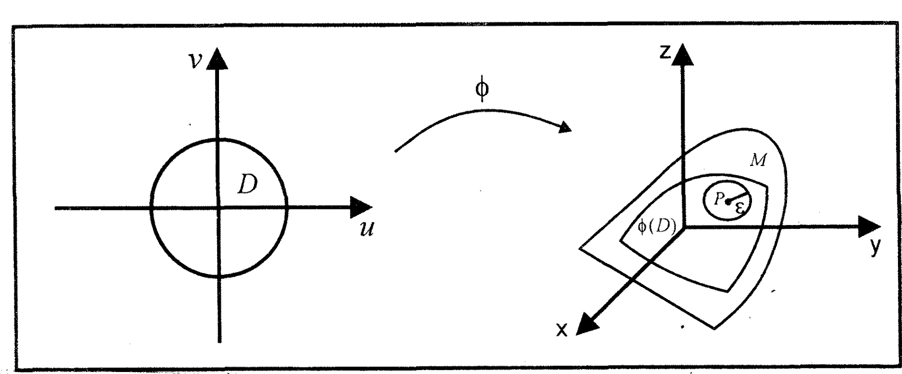


Fig. 6.32

Ejemplo 35.- La superficie esférica de centro en el origen y radio 1, es una superficie regular.

PLANO TANGENTE Y VECTOR NORMAL EN UN PUNTO DE UNA SUPERFICIE REGULAR EN $\mathbb{R}^3$

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $P \in M$. Entonces existe una parametrización propia. $\phi: D \to M$ tal que $\phi(u;v) = (\phi_1(u;v); \phi_2(u;v); \phi_3(u;v))$.

Sea $(u_0; v_0) \in D$, tal que $\phi(u_0; v_0) = P$ y sea $C_1 = \{\phi(u_0; v) \in M / (u_0; v) \in D\}$ una curva que resulta al intersecar la superficie M con el plano $u = u_0$ (Fig. 6.33)

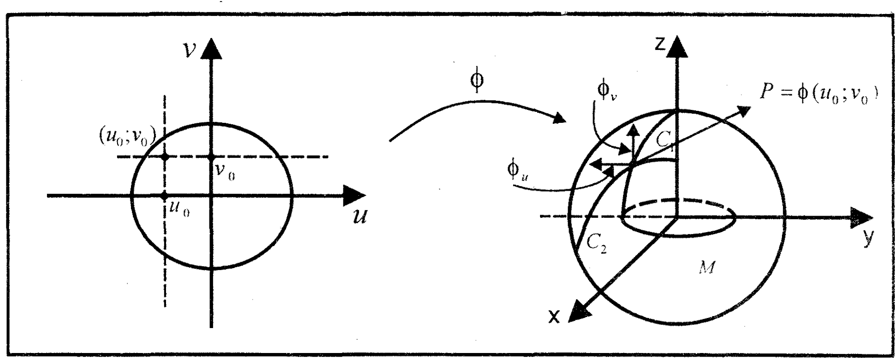


Fig. 6.33

Por consiguiente.

C_1: $\phi(u_0; v) = (\phi_1(u_0; v); \phi_2(u_0; v); \phi_3(u_0; v))$ es una curva regular en M. Así el vector velocidad a la curva C_1 en el punto P es

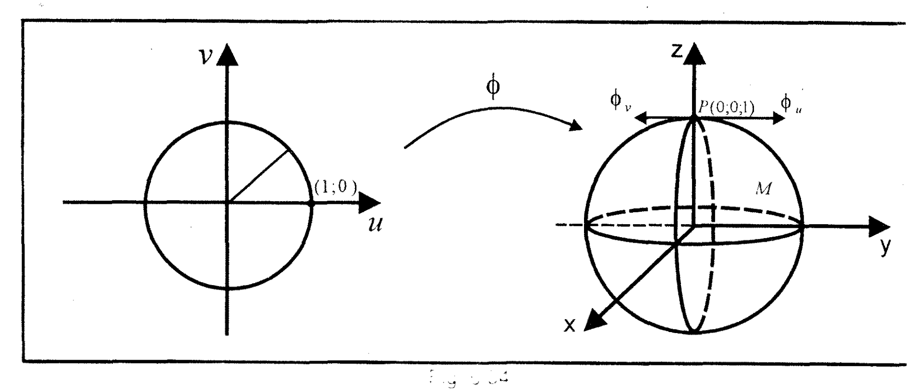
$$\phi_v(u_0; v_0) = \frac{\partial\phi(u_0; v_0)}{\partial v} = \left(\frac{\partial\phi_1(u_0; v_0)}{\partial v}; \frac{\partial\phi_2(u_0; v_0)}{\partial v}; \frac{\partial\phi_3(u_0; v_0)}{\partial v}\right)$$

Análogamente. $C_2 = \{\phi(u; v_0) \in M / (u; v_0) \in D\}$ es una función regular en M, es decir, C_2: $\phi(u; v_0) = (\phi_1(u; v_0); \phi_2(u; v_0); \phi_3(u; v_0))$. Su vector velocidad en el punto P es

$$\phi_u(u_0; v_0) = \frac{\partial\phi(u_0; v_0)}{\partial u} = \left(\frac{\partial\phi_1(u_0; v_0)}{\partial u}; \frac{\partial\phi_2(u_0; v_0)}{\partial u}; \frac{\partial\phi_3(u_0; v_0)}{\partial u}\right)$$

Definición 10.- El plano generado por los vectores ϕ_u y ϕ_v es el plano tangente a M en el punto P cuya normal es $N = \phi_u \times \phi_v$. Por ser ϕ una parametrización propia. $\phi_u \times \phi_v \neq \overline{0}$

Ejemplo 36.- Sea M la superficie esférica de centro en el origen y radio 1.



Sea $D = \{(u;v) \in \mathbb{R}^2 \ / \ u^2 + v^2 \leq 1\}$ y

$\phi: D \to M \ / \ \phi(u;v) = \left(u;v;\sqrt{1-u^2-v^2}\right)$ una parametrización propia de M. Para el punto $P(0;0;1) \in M$, se tiene $C_1: \phi(0;v) = \left(0;v;\sqrt{1-v^2}\right)$ y su vector velocidad es $\phi_v = \left(0;1;\dfrac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ y al evaluar en $Q(0;0)$ resulta $\phi_v = (0;1;0)$

Análogamente, $C_2: \phi(u;0) = \left(u;0;\sqrt{1-u^2}\right)$ y $\phi_u(0;0) = (1;0;0)$

Así, el vector normal del plano tangente a la superficie esférica en $P(0;0;1)$ es

$$\vec{N} = \phi_u \times \phi_v = (0;0;1)$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente es

$$P_T: z = 1$$

6.5 ÁREA DE UNA SUPERFICIE

Sea $\phi: D \to M \subset \mathbb{R}^3$ una parametrización propia de la superficie M, es decir, la forma paramétrica de una superficie expresada en la forma $z = f(x;y)$.

Sea $Q_0(u_0;v_0) \in D$ y $P_0 = \phi(u_0;v_0)$ el punto correspondiente en M.

Si hacemos un pequeño cambio du a lo largo de la línea $v = v_0$, y un pequeño cambio dv a lo largo de $u = u_0$ en Q_0, el área del rectángulo así formado en el plano UV es $dudv$. Estos cambios inducen cambios vectoriales en M que son dados aproximadamente por

$$d\phi_u = \frac{\partial \phi}{\partial u} du = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial \phi_2}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial \phi_3}{\partial u}\vec{k}\right) du \quad \text{y}$$

$$d\phi_v = \frac{\partial \phi}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial \phi_2}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial \phi_3}{\partial v}\vec{k}\right) dv$$

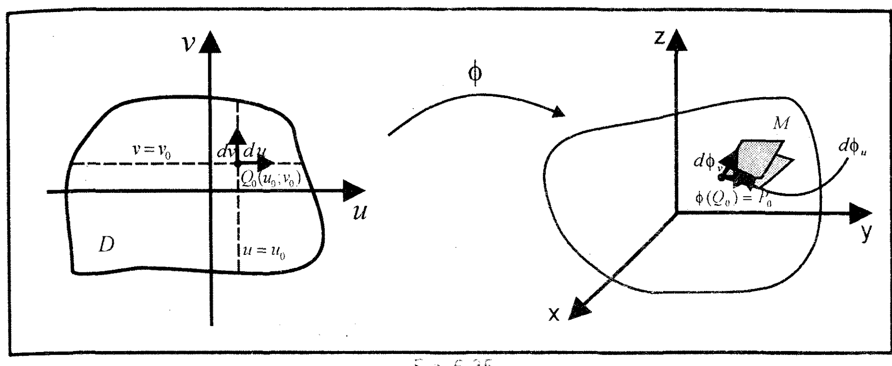


Fig 6.35

Estas diferenciales $d\phi_u$ y $d\phi_v$ son aproximaciones de los lados de un pequeño paralelogramo en M cuya área está dada por
$dA = \|d\phi_u \times d\phi_v\| = \|\phi_u \times \phi_v\| dudv$; al que se le denomina **elemento de área** de la superficie M, o también **diferencial de área**.

Por tanto, el área de la superficie M, viene dada por

$$A(M) = \iint_D \|\phi_u \times \phi_v\| dudv = \iint_D \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| dudv$$

Observación 12.- Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable, tal que $z = f(x;y)$. La gráfica de f es la superficie

$$M = G_f = \{(x;y;z) \ / \ z = f(x;y), \ \forall(x;y) \in D\}$$

La parametrización propia de esta superficie es

$$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3 \ / \ \phi(x;y) = (x;y;f(x;y))$$

Luego, se tiene

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2}$$

Por consiguiente, el área de la superficie $z = f(x;y)$ está dada por

$$A(M) = \iint_D \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2} \, dxdy$$

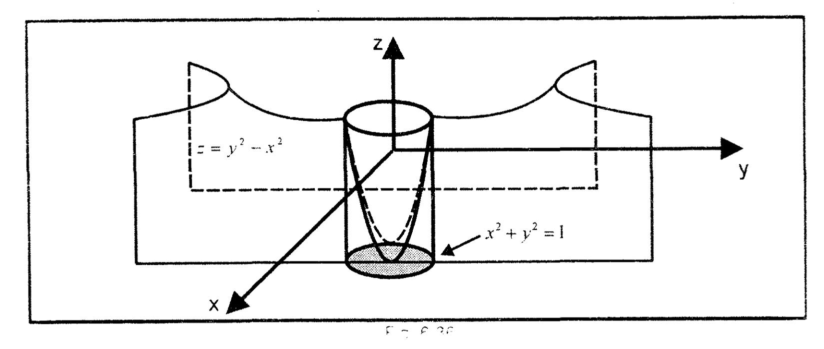
Ejemplo 37.- Determine el área de la parte del paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Solución

La parametrización propia del paraboloide hiperbólico (Fig. 6.36) es

$$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3 \ / \ \phi(x; y) = (x; y; y^2 - x^2)$$

donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$



Como $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = (1; 0; -2x)$ y $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = (0; 1; 2y)$, se tiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} = (2x; -2y; 1) \quad y \quad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial x} \times \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$$

Luego, el área del paraboloide hiperbólico que se encuentra dentro del cilindro es

$$A(M) = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx dy$$

Al utilizar coordenadas polares $x = r\cos\theta$ y $y = r\, sen\, \theta$, se obtiene

$$A(M) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{(5\sqrt{5} - 1)\pi}{6} u^2$$

Ejemplo 38.- Determine el área de una superficie esférica de radio a

Solución

Sea $z = f(x; y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ la parte superior de la superficie esférica de radio a. La parametrización propia de la parte superior de la superficie esférica es $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M$ tal que $\phi(x; y) = (x; y; \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})$

donde $D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq a^2\}$

Como $\frac{\partial\phi}{\partial x}=\left(1;0;-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)$ y $\frac{\partial\phi}{\partial y}=\left(0;1;-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)$, se tiene

$$\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x}\times\frac{\partial\phi}{\partial y}\right\|=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

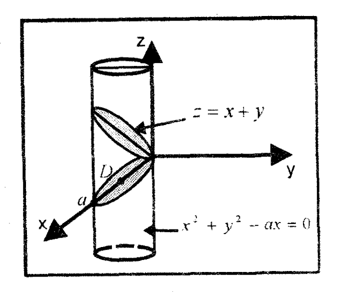
Luego, el área dé la superficie esférica es

$$A(M)=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dA$$

Al utilizar coordenadas polares $x=r\cos\theta$ y $y=r\,sen\,\theta$, se obtiene

$$A(M)=8\int_0^{\pi/2}\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,rdrd\theta=4\pi a^2u^2$$

Ejemplo 39.- Encuentre el área de la parte del plano $x+y-z=0$ que se encuentra dentro del cilindro circular $x^2+y^2-ax=0$ $(a>0)$.



Solución

La parametrización propia del plano

$z=f(x;y)=x+y$ es

$\phi\colon D\subset\mathbb{R}^2\to M\subset\mathbb{R}^3$ tal que

$\phi(x;y)=(x;y;x+y)$

donde $D=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\le\frac{a^2}{4}\right\}$

Como $\frac{\partial\phi}{\partial x}=(1;0;1)$ y $\frac{\partial\phi}{\partial y}=(0;1;1)$, se tiene

$$\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x}\times\frac{\partial\phi}{\partial y}\right\|=\sqrt{3}$$

Luego, el área de la parte del plano es

$$A(M)=2\int_0^a\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{3}\,dydx$$

Al pasar a coordenadas polares, se obtiene

$$A(M)=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{3}\,rdrd\theta=\frac{\sqrt{3}\,\pi a^2}{4}u^2$$

Ejemplo 40.- Considere la superficie $z = 2 - x^2 - y$, donde su dominio de definición es el triángulo D limitado por las rectas $x = 0$, $y = 1$, $y = x$. Halle el área de la superficie.

Solución

La parametrización propia de la superficie es $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M$ tal que

$$\phi(x;y) = (x;y;2 - x^2 - y)$$

donde $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leq y \leq 1, \ \ 0 \leq x \leq 1\}$ (Fig. 6.38)

Como $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x = (1;0;-2x)$ y $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y = (0;1;-1)$, se tiene

$$\|\phi_x \times \phi_y\| = \sqrt{2 + 4x^2}$$

Por tanto, el área de la superficie es

$$A(M) = \iint_D \sqrt{2 + 4x^2}\, dA = \int_0^1 \int_x^1 \sqrt{2 + 4x^2}\, dydx$$

$$= \int_0^1 (1 - x)\sqrt{2 + 4x^2} = \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{2}}{6} = 0{,}809$$

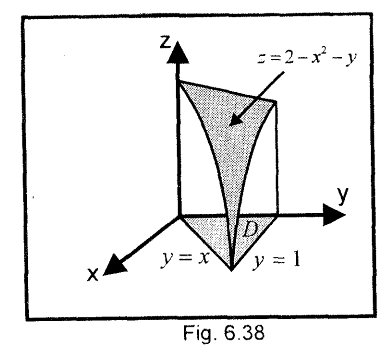


Fig. 6.38

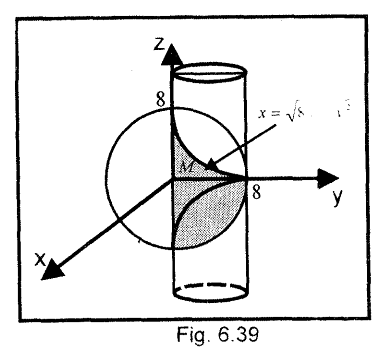


Fig. 6.39

Ejemplo 41.- Calcule el área del pedazo de cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 64$.

Solución

Al proyectar el pedazo del cilindro sobre el plano YZ, se tiene

$M: x = f(y;z) = \sqrt{8y - y^2}$ (Fig. 6.39)

La curva de intersección entre la esfera y el cilindro en el plano YZ es $z^2 = 64 - 8y$. La parametrización propia de la superficie M es $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to M \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(y;z) = (\sqrt{8y - y^2}; y; z)$, donde

$$D = \left\{(y;z) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq z \leq \sqrt{64 - 8y}, \ \ 0 \leq y \leq 8\right\}$$

Como $\phi_y = \left(\frac{4-y}{\sqrt{8y-y^2}}; 1; 0\right)$ y $\phi_z = (0; 0; 1)$, se tiene

$$\|\phi_y \times \phi_z\| = \sqrt{1 + \frac{(4-y)^2}{8y-y^2}} = \frac{4}{\sqrt{8y-y^2}}$$

Por tanto, el área de la superficie M es

$$A(M) = \iint_D \frac{4}{\sqrt{8y-y^2}} dzdy = 4\int_0^8 \int_0^{\sqrt{64-8y}} \frac{4\, dzdy}{\sqrt{8y-y^2}} = 256u^2$$

EJERCICIOS

1.- Encuentre el área del pedazo del paraboloide elíptico $z = x^2 + y^2$ que se encuentra debajo del plano $z = 4$ R. $(17\sqrt{17} - 1)\frac{\pi}{6}u^2$

2.- Calcule el área del pedazo de cono $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra sobre el plano XY y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0$ R. $\sqrt{2}\,\pi\, u^2$

3.- Halle el área de la superficie del paraboloide $2z = x^2 + y^2$ que queda fuera del cono $z^2 = x^2 + y^2$ R. $\frac{2\pi(5\sqrt{5} - 1)}{3} u^2$

4.- Encuentre las áreas de las siguientes superficies

a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x; y) \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $z = x^2 + y^2$, $D = \{(x; y) \;\; x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $2z = 4 - x^2 - y^2$, $D = \{(x; y) \,/\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

5.- Encuentre el área de la porción de cada superficie descritos como:

a) la parte de $bz = x^2 - y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ $(ab > 0)$

R. $\frac{\pi}{6b}\left[(b^2 + 4a^2)^{3/2} - b^3\right]u^2$

b) la parte del cilindro $y^2 + z^2 = 4a^2$ para el cual $z \geq 0$, $0 \leq y \leq a - x$,

$0 \leq x \leq a$ R. $a^2\left(\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} - 4\right)u^2$

c) la parte del cilindro $z^2 = 8x$ interior a la columna prismática acotada por los planos $y = 0$, $x = 1$ y el cilindro $x^2 = 4y$ R. $\frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{8}u^2$

d) el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cortado por el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ R. $2a^2(\pi - 2)u^2$

6.- Encuentre el área de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ interior al cilindro $y^2 = a(x + a)$ R. $8\sqrt{2}\, a^2\, u^2$

7.- En los siguientes ejercicios, halle las áreas de las partes indicadas de las superficies dadas.

a) De la parte $z^2 = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $z^2 = 2py$ R. $2\sqrt{2}\pi p^2 u^2$

b) De la parte $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro $x^2 - y^2 = a^2$ y los planos $y = b, y = -b$ R. $8\sqrt{2}\, ab\, u^2$

6.6 INTEGRAL DE SUPERFICIE

Sea $E \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $g: E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función definida sobre E, sea $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to E$ una parametrización propia de E, donde D es una región cerrada en $\mathbb{R}^2$. (Fig. 6.40).

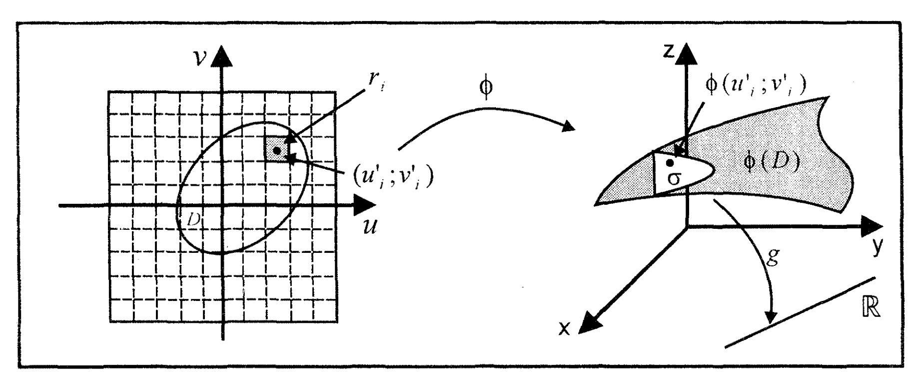


Fig 6 40

Sea $P = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ una partición de la región cerrada $D \subset \mathbb{R}^2$, esta partición induce la partición $P' = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$, de $\phi(D)$ donde $\sigma_i = \phi(r_i)$ para $i = 1,2, \dots, n$.

Sea $(u'_i; v'_i) \in r_i$, un punto arbitrario tal que $\phi(u'_i; v'_i) = (x'_i, y'_i, z'_i)$. La suma de Riemann de g correspondiente a la partición P'es

$$\sum_{i=1}^{n} g(x'_i, y'_i, z'_i)A(\sigma_i)\text{, donde } A(\sigma_i) = \acute{A}rea\ de\ \sigma_i$$

La integral de superficie de la función g sobre la superficie E está dada por

$$I = \iint_E g(x;y;z)d\sigma = \lim_{\|A(\sigma_i)\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x'_i, y'_i, z'_i)A(\sigma_i)$$

Observación 13.- Si $E = \phi(D)$, entonces la integral de superficie de g sobre E está dada por

$$I = \iint_E g(\phi(u;v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| dudv$$

siempre que exista esta integral.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA INTEGRAL DE SUPERFICIE

Teorema 5.- Sea E una superficie regular de $\mathbb{R}^3$, $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to E$ una parametrización de E, tal que $\phi(u;v) = (\phi_1(u;v); \phi_2(u;v); \phi_3(u;v))$
Si $g: E \to \mathbb{R}$ es función continua, entonces:

a) existe $\iint_E g(x;y;z)d\sigma$

b) $\iint_E g(x;y;z)d\sigma = \iint_E g(\phi_1(u;v); \phi_2(u;v); \phi_3(u;v)) \|\phi_u \times \phi_v\| dudv$

Observación 14.- Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región cerrada y $f: D \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de clase C^2, su gráfica es la superficie

$$E = G_f = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x;y),\ \forall (x;y) \in D\}$$

La parametrización de E es
$\phi: D \to E \subset \mathbb{R}^3$ definido por $\phi(x;y) = (x;y;f(x;y))$
Sea $g: E \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces la **integral de superficie** de g sobre E está dada por

$$\iint_E g(x;y;z)d\sigma = \iint_E g(x;y;f(x;y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

Ejemplo 42.- Calcule $\iint_E g(x;y;z)d\sigma$, donde $g(x;y;z) = x^2 z$,

$E: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (Fig. 6.41)

Solución

Como $z = f(x;y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$,

entonces al aplicar la fórmula de la observación 14, se tiene

$$I = \iint_E x^2 z \, d\sigma = \iint_E \sqrt{1 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}} \, dydx$$

donde $D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ es la proyección de E sobre el plano XY. Por lo tanto,

$$I = \iint_D x^2 dydx = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 dydx = 2\int_{-1}^{1} x^2 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}$$

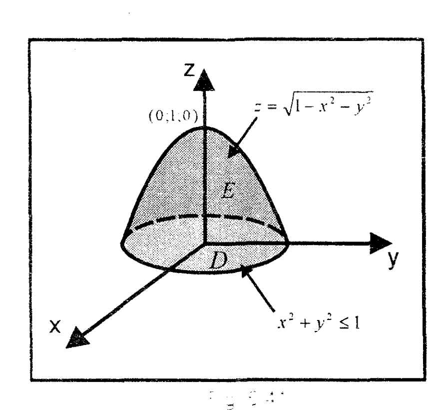


Fig. 6.41

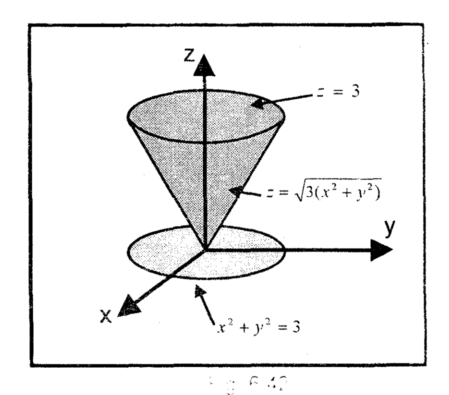


Fig. 6.42

Ejemplo 43.- Calcule $\iint_E (x^2 + y^2)d\sigma$ siendo E la superficie del cono

$z^2 = 3(x^2 + y^2)$ entre $z = 0$ y $z = 3$ (Fig. 6.42)

Solución

Como $z = f(x;y) = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\sqrt{3}\, x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\sqrt{3}\, y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, donde

$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \, / \, 0 \leq x \leq \sqrt{3}, \; 0 \leq y \leq \sqrt{3 - x^2}\}$ es la proyección de E sobre XY, entonces se tiene

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{1+\frac{3x^2}{x^2+y^2}+\frac{3y^2}{x^2+y^2}}\,dydx$$

$$= 2\iint_D (x^2+y^2)dydx = 8\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-x^2}}(x^2+y^2)dydx = 9\pi$$

Ejemplo 44.- Calcule $\iint_E g(x;y;z)d\sigma$, donde $g(x;y;z) = xz, E$ es la parte del cilindro $x^2+y^2 = 1$ entre los planos $z = 0$ y $z = x+2$

Solución

En coordenadas cilíndricas $r,\ \theta$ y z, E está sobre la superficie $r = 1$. Así, al escoger θ y z como coordenadas paramétricas en E se escribe

$E: x = \cos\theta,\ \ y = sen\,\theta,\ \ z = z,\ \ con\ (\theta;z) \in D$; donde

$$D = \{(\theta;z)\ /\ -\pi \leq \theta \leq \pi,\ \ 0 \leq z \leq 2+\cos\theta\}$$

Luego, la parametrización propia del cilindro es

$\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to E \subset \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(\theta;z) = (\cos\theta\,;sen\,\theta;z)$

Como $\phi_\theta = (-sen\,\theta;\cos\theta\,;0)$ y $\phi_z = (0;0;1)$, se tiene

$$\|\phi_\theta \times \phi_z\| = 1$$

Por tanto, al aplicar la fórmula del teorema 5 resulta

$$I = \iint_E g(x;y;z)d\sigma = \iint_D g(\phi_1(\theta;z);\phi_2(\theta;z);\phi_3(\theta;z))\|\phi_\theta \times \phi_z\|dzd\theta$$

$$= \iint_D z\cos\theta\,\|\phi_\theta \times \phi_z\|dzd\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2+\cos\theta} z\cos\theta\ dzd\theta = 2\pi$$

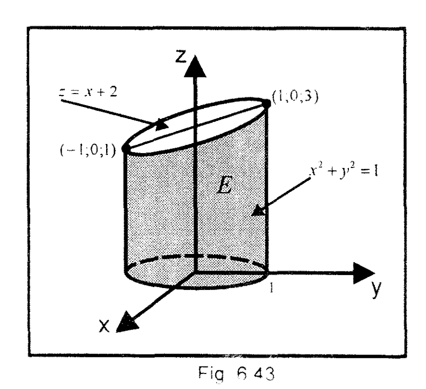


Fig 6.43

EJERCICIOS

1.-Calcule las siguientes integrales de superficie $\iint_E g(x;y;z)d\sigma$

a) $\iint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma$, donde E es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

$0 \le z \le b \quad R.\ 2\pi a^2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{3}}$

b) $\iint\limits_E x^2\, d\sigma$, donde E es el cilindro $x^2+y^2=1,\ \ 0\le z\le 1$

c) $\iint\limits_E x(y^2+z^2)d\sigma$, E semiesfera $x=\sqrt{9-y^2-z^2}$ $\quad R.\ \frac{81\pi}{2}$

d) $\iint\limits_E (y^2+z^2)d\sigma,\ \ E: x=\sqrt{4-y^2-z^2}$

e) $\iint\limits_E xyzd\sigma$, E es el triángulo con vértices $(1;0;0)$, $(0;2;0)$ y $(0;1;1)$

f) $\iint\limits_E z^2 d\sigma$, E es la frontera del cubo $C=[-1;1]\times[-1;1]\times[-1;1]$

Sugerencia: Resolver cada caso por separado y sumar los resultados.

g) $\iint\limits_E zd\sigma$, E es la superficie $z=x^2+y^2$ seccionado por $x^2+y^2\le 1$

$R.\ \frac{\pi}{8}\left(\frac{10}{3}\sqrt{5}+\frac{2}{15}\right)$

2.- En cada uno de los siguientes ejercicios calcule $\iint\limits_E g(x;y;z)d\sigma$

a) $g(x;y;z)=x^2$, E es la parte del plano $z=x$ interior al cilindro $x^2+y^2=1$

$R.\ \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

b) $g(x;y;z)=x^2$, E es la parte del cono $z^2=x^2+y^2$ entre los planos $z=1$ y $z=2$ $\quad R.\ \frac{15\sqrt{2}}{4}\pi$

7 SUCESIONES Y SERIES

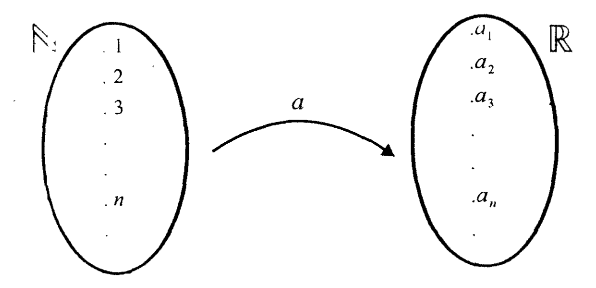
7.1 SUCESIONES

En el lenguaje corriente las palabras "*sucesión*" y "*serie*" son sinónimos y se usan para designar un conjunto de cosas o sucesos dispuestos a un orden.

En matemática, estas palabras tienen un significado especial. La palabra *sucesión* tiene un sentido similar al del lenguaje corriente, pues con ella se indica un conjunto de objetos colocados en orden, mientras que la palabra *serie* se usa en un sentido completamente diferente.

En este capítulo primero se aborda el concepto de *sucesión* que es la base para comprender satisfactoriamente el concepto de series de números reales positivos y serie de potencias.

Definición 1.- Se denomina *sucesión de números reales* a toda función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ y se denota por: $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ /\ a(n) = a_n$



Esto es, una sucesión $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ es un arreglo ordenado de números reales, de modo que tiene un primer elemento, un segundo elemento, un tercer elemento y así sucesivamente.

Una sucesión se puede especificar proponiendo suficientes elementos iniciales, como por ejemplo

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, \dots$$

o dando una fórmula explicita para el n-ésimo elemento, esto es

$$a_n = 5n - 2,\ \ n \geq 1 \quad \text{ó} \quad \{a_n\}_{n\geq 1} = \{5n - 2\}_{n\geq 1}$$

o mediante una regla de recurrencia

$$a_n = a_{n-1} + 5,\ \ n \geq 2,\ \ a_1 = 3$$

Ejemplo 1.-

a) $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \dots, a_n = \frac{2}{n}$ b) $1^2, 2^2, 3^2, \dots, a_n = n^2, \dots$

c) $-1, 1, -1, 1, -1, \dots, a_n = (-1)^n, \dots$

d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, a_n = \sqrt{n}, \dots$ e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, a_n = \frac{n}{n+1}, \dots$

f) $2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \dots, a_n = 3 - \frac{1}{n}, \dots$

En cada uno de estos ejemplos hemos exhibido el n-ésimo elemento para así tener en forma más compacta de la forma general de elementos de la sucesión.

Una representación gráfica más conveniente de una sucesión se obtiene marcando simplemente los puntos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ sobre la recta real $\mathbb{R}$.

Este tipo de diagrama indica hacia donde va la sucesión. Por ejemplo, se tiene

$\{a_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}_{n\geq 1}$

$a_4 \quad a_3 \quad a_2 = 1 \quad a_1 = 2$; $0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3}$

$\{a_n\} = (-1)^n{}_{n\geq 1}$

$b_5 = b_3 = b_1 = -1 \quad 0 \quad 1 = b_2 = b_4$

$\{a_n\} = \left\{\frac{2}{n}\right\}_{n\geq 1}$

$c_1 = \frac{1}{2} \quad c_2 = \frac{2}{3} \quad 1$

LÍMITE DE UNA SUCESION

Definición 2.- Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ tiene como límite el número real L, y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N > 0 \ /\ \forall n > N \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

$L-\varepsilon \quad L \quad L+\varepsilon$

$a_1 \quad a_2 \quad a_N \quad a_{N+1}$

Si L es finito, se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es convergente, y si L es infinito o no existe, se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es divergente.

Ejemplo 2.- Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}_{n\geq 1}$ tiene como límite $\frac{1}{2}$.

Solución

Dado $\varepsilon > 0$, se debe encontrar un $N > 0$ tal que $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon, \ \forall n > N$

En efecto $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow 4n+2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon} = N$

Por tanto, $\forall n > N = \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$, se tiene $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

Ejemplo 3.- Demuestre que la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ no es convergente.

Solución

Suponga que $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n = x_0$. Entonces, para $\varepsilon = 1, \exists N > 0$,
tal que $\forall n > N$, se tiene $|(-1)^n - x_0| < 1$
Ahora, para n_1 par y $n_1 > N$ resulta $|1 - x_0| < 1$ y para n_2 impar con $n_2 > N$, se tiene $|-1 - x_0| < 1$
Luego, al aplicar la propiedad de la desigualdad triangular se obtiene

$$2 = |-1-1| \leq |-1-x_0| + |1-x_0| < 1+1 = 2$$

Así, se tiene $2 < 2$ (contradicción).
Por tanto, la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ es divergente.

Ejemplo 4.- Determine si la sucesión $\left\{n \, sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ es convergente o divergente.

Solución

Al hacer el cambio de variable $x = \frac{1}{n}$ ($x \to 0$ cuando $n \to \infty$), se tiene

$$\lim_{n\to\infty} n \, sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(\pi x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\pi \cos(\pi x)}{1} = \pi$$

Por tanto, la sucesión $\left\{n \, sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}_{n\geq 1}$ es convergente y converge a π.

Observación 1.- En los problemas sobre el cálculo del límite de una sucesión, es recomendable utilizar la relación siguiente

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n, \ \forall n \in N$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Esto nos permite aplicar la regla de L'Hospital al problema de calcular el límite de una sucesión.

PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES

Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ sucesiones convergentes y c una constante, entonces

1) $\lim_{n\to\infty} c = c$

2) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c \lim_{n\to\infty} a_n$

3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

4) $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right).\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

5) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}, \; si\; b_n \neq 0$

Como las demostraciones de estas propiedades son semejantes a las correspondientes para funciones, se deja como ejercicio para el lector.

Ejemplo 5.- Pruebe que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, si $0 < r < 1$ y es divergente si $r > 1$.

Solución

Para $0 < r < 1$, se necesita probar que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$|r^n - 0| < \varepsilon, \quad \forall n > N$$

Así, para $\varepsilon > 0$ se tiene

$$|r^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow r^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \, \ln(r) < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(r)} = N$$

Luego, $|r^n - 0| < \varepsilon, \quad \forall n > N = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(r)}$

Para $r > 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$. Por tanto, la sucesión es divergente.

Teorema 1.- Teorema del emparedado para sucesiones. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones convergentes a L, esto es, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ y existe un entero M tal que $a_n \leq c_n \leq b_n, \quad \forall n > M$.Entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

Ejemplo 6.- Pruebe que $\lim_{n\to\infty} \frac{sen\,(n)}{n} = 0$

Solución

De acuerdo a la propiedad de la función seno para $n > 1$, se tiene

$$-1 \leq sen\,(n) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{sen\,(n)}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n > 1$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$, entonces por el teorema del emparedado

se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sen\,(n)}{n} = 0$$

Ejemplo 7.- Determine si la sucesión $\left\{\frac{\ln(n^2)}{5^n}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente o divergente.

Solución

Al aplicar la regla de L'Hospital, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2)}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\ \ln(n)}{5^n} \overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n\ 5^n\ \ln 5} = 0$$

Por tanto, la sucesión es convergente y converge a 0.

Ejemplo 8.- Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 + 5n^2 + 7}{2n^3 - 6n + 4}$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 + 5n^2 + 7}{2n^3 - 6n + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^3}}{2 - \frac{6}{n^2} + \frac{4}{n^3}} = \frac{8}{2} = 4$$

EJERCICIOS

1.- Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ converge a 0.

2.- Demuestre que la sucesión $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ converge a 1.

3.- Determine si las sucesiones siguientes son convergentes o divergentes. Si son convergentes encuentre su límite.

a) $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ b) $\left\{\frac{3n^2+1}{3n^2-n}\right\}$ c) $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$

d) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$ e) $\left\{\frac{n^2}{2n+1}\ sen\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$

Sugerencia: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n+1}\ sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1/n}$

f) $\left\{\frac{\ln(n)}{n^2}\right\}$ **sugerencia**:aplicar la regla de L'Hospital

g) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-1}\right\}$ h) $\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2n}\right\}$

i) $\left\{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right\}$ j) $\left\{n\left(\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

4.- Demuestre cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)=2$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{5n-4}\right)=\dfrac{4}{5}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+8n+1}{5+3n-n^2}\right)=-5$

PRUEBA DE LA RAZÓN PARA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Teorema 2.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales.

Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

Ejemplo 9.- Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{5^n}{n!}\right\}$ es convergente o divergente.

Solución

Como $a_n=\dfrac{5^n}{n!}$ y $a_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}$, entonces se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{5^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^{n+1}.n!}{5^n.(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5}{n+1}=0$$

Luego, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5^n}{n!}=0$

Por tanto, la sucesión es convergente.

Ejemplo 10.- Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$ es convergente o divergente.

Solución

Puesto que $a_n=\dfrac{n!}{n^n}$ y $a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$, entonces se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!\,(n+1)^{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

Luego, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$

Por consiguiente, la sucesión dada es convergente.

Ejemplo 11.- Determine si la sucesión $\left\{\dfrac{2^n+n^4}{3^n-n^7}\right\}$ es convergente o divergente.

Solución

Al dividir cada término de la sucesión entre 3^n, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^4}{3^n-n^7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{n^4}{3^n}}{1-\dfrac{n^7}{3^n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4}{3^n}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^7}{3^n}}$$

Al aplicar el criterio de la razón separadamente a cada sucesión, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n^4}{3^n-n^7}=0$$

Por consiguiente, la sucesión dada es convergente.

Teorema 3.- Teorema de la media aritmética. Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

Teorema 4.- Teorema de la media geométrica. Si $\{b_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión convergente y $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_1.b_2\ldots b_n}=b$$

Ejemplo 12.- Determine si la sucesión

$$\left\{\frac{n}{\sqrt{9n^4+1}}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{9}{3}}+\sqrt{\frac{13}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]\right\}_{n\geq 1}$$ es convergente o divergente.

Solución

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{9n^4+1}}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{9}{3}}+\sqrt{\frac{13}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{9n^4+1}}.\frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{9n^4+1}}.\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}}{n}\qquad(*)$$

El límite del primer factor es

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{9n^4+1}}=\frac{1}{3}$$

Al aplicar el teorema de la media aritmética al segundo factor, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}=2$$

Luego, $L=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{9n^4+1}}\left[\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{9}{3}}+\sqrt{\frac{13}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{4n+1}{n+1}}\right]=\left(\frac{1}{3}\right)(2)=\frac{2}{3}$

Por tanto, la sucesión dada es convergente.

Ejemplo 13.- Halle el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$, donde

$$a_n=\sqrt[3]{n^3+2n^2+3}-\sqrt{n^2+4n+1}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}}\left[\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right]$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2+3}-\sqrt{n^2+4n+1}\right)+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+4n+1}}\left[\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right]$$

$$=-\frac{4}{3}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+4n+1}}.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right)$$

Como $\lim_{n\to\infty}\frac{7n+1}{n+2}=7$, entonces por el teorema de la media aritmética resulta

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{8}{3}+\frac{15}{4}+\cdots+\frac{7n+1}{n+2}\right]=7$$

Para el primer factor se tiene $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+4n+1}} = 1$

Por tanto.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{4}{3} + 1(7) = \frac{17}{3}$$

Ejemplo 14.- Determine si la sucesión $\left\{\sqrt[n]{\dfrac{2}{8}\cdot\dfrac{5}{23}\cdots\dfrac{n^2+1}{5n^2+3}}\right\}_{n\geq 1}$ es convergente o divergente.

Solución

Se tiene.

$$a_1 = \frac{2}{8},\quad a_2 = \frac{5}{23},\ldots,a_n = \frac{n^2+1}{5n^2+3},\ldots \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{5}$$

Luego, por el teorema de la Media Geométrica, resulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{8}\cdot\frac{5}{23}\cdots\frac{n^2+1}{5n^2+3}} = \frac{1}{5}$$

EJERCICIOS

1.- Determine si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes. Para el caso que sea convergente encuentre su límite.

a) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+4n^2+1}$ $\qquad$ $R. -\dfrac{5}{6}$

b) $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[5]{n^5+n^4+1}}{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[4]{n^4+n^2+1}}$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{2}{15}$

c) $a_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ $\qquad$ $R.\ \dfrac{1}{3}$

d) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+5n-1} - \sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ $\qquad$ $R.\ 0$

e) $\left\{\dfrac{n}{3^n}\right\}_{n\geq 1}$ $\qquad$ f) $\left\{\dfrac{n^2+3}{2^n+n}\right\}_{n\geq 1}$ $\qquad$ g) $\left\{\dfrac{n^3}{4^n}\right\}_{n\geq 1}$ $\qquad$ h) $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}_{n\geq 1}$

i) $\left\{\displaystyle\int_0^n \frac{1}{4+9x^2}dx\right\}_{n\geq 1}$ $\quad R.\ \dfrac{\pi}{12}$ $\qquad$ j) $\left\{\displaystyle\int_0^n e^{(a-s)x}dx\right\}_{n\geq 1}$ $\quad R.\ \dfrac{1}{s-a}, s > a$

2.- Encuentre el límite de las sucesiones siguientes

1) $a_n = \dfrac{(10000)^n}{n!}$ R. 0 2) $a_n = \sqrt[n]{2}$ R. 1

3) $a_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} - \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ 4) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n}-1} - \dfrac{n}{\sqrt{n}+1}$ R. 2

5) $a_n = \dfrac{3+5+7+\cdots+(2n+1)}{2n+3} - \dfrac{3n+1}{6}$ R. $\dfrac{1}{12}$

Sugerencia: Aplique la suma de n términos de una progresión aritmética.

6) $a_n = \dfrac{sen\,(e^{-5n})}{sen\,(e^{-n})}$ R. 0 7) $a_n = \left(\dfrac{n^3+8}{n^3+1}\right)^{n3}$ R. e^7

8) $a_n = \dfrac{n^5+5n^3}{3^n-5n^2}$ R. 0 9) $a_n = \dfrac{5^n+7^n}{9^n+n^4}$ R. 0

10) $a_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{2^n}$ R. $\dfrac{3}{2}$

11) $a_n = \dfrac{1}{14n}\left(3^{2/4}+3^{5/7}+3^{10/12}+\cdots+3^{\left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)}\right)$ R. $\dfrac{3}{14}$

12) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{5n^2+n+1}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)\left(\dfrac{3}{12}\right)\cdots\left(\dfrac{2n-1}{6n}\right)}$ R. $\dfrac{1}{3}$

13) $a_n = \dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{2n^4+n-1}$ R. $\dfrac{1}{8}$

14) $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{\ln(8n)}{\ln(14n)}\right)^n\cdot\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{10}{7}\cdots\dfrac{7n-4}{3n+1}\right)}$ R. $\dfrac{7}{3}$

15) $a_n = \sqrt[n]{7n\left(\dfrac{\ln 6}{\ln 8}\cdot\dfrac{\ln 11}{\ln 15}\cdots\dfrac{\ln(5n+1)}{\ln(7n+1)}\right)}$ R. 1

16) $a_n = \dfrac{7}{\sqrt[3]{1-27n^3}}\cdot\dfrac{\ln(7n)}{\ln(\ln n)}\left[5^{1/2}+5^{3/4}+5^{7/8}+\cdots+5^{\frac{2^n-1}{2n}}\right]$ R. $-\dfrac{35}{3}$

SUCESIONES DIVERGENTES

Definición 3.- Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es divergente a $+\infty$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \text{Dado } M > 0, \exists N > 0, \text{ tal que } \forall n > N \Longrightarrow a_n > M$$

Definición 4.- Una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es divergente a $-\infty$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \text{Dado } M > 0, \exists N > 0, \text{ tal que } \forall n > N \Longrightarrow a_n < -M$$

Ejemplo 15.-

a) La sucesión $\{n^2\}_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$, pues $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

b) La sucesión $\{-2n+8\}_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$, pues $\lim\limits_{n\to\infty}(-2n+8) = -\infty$

c) La sucesión $\{5n+8\}_{n\geq 1}$ diverge a $+\infty$

d) La sucesión $\left\{\dfrac{n-n^3}{n^2+1}\right\}_{n\geq 1}$ diverge a $-\infty$, pues $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-n^3}{n^2+1} = -\infty$

SUCESIONES MONÓTONAS Y ACOTADAS

Definición 5.- Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ se dice que

i) es creciente, si $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) es estrictamente creciente, si $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) es decreciente, si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) es estrictamente decreciente, si $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Con la frase *sucesión monótona* se describe a *sucesiones crecientes*, *estrictamente crecientes*, *decrecientes* y *estrictamente decrecientes*.

Ejemplo 16.-

a) La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ es estrictamente decreciente.

b) La sucesión $\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ es estrictamente creciente.

c) La sucesión $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ no es creciente ni decreciente. esto es, no es monótona.

d) La sucesión $\{0^n\}_{n\geq 1}$ es creciente.

e) La sucesión $\left\{\dfrac{1}{n}(-1)^{n+1}\right\}_{n\geq 1}$ no es monótona.

Definición 6.-

i) Se dice que la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es acotada inferiormente, si y sólo si

$\exists k_1 \in \mathbb{R}$, tal que $k_1 \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$

ii) La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es acotada superiormente, si y sólo si

$\exists k_2 \in \mathbb{R}$, tal que $a_n \leq k_2, \forall n \in \mathbb{N}$

iii) La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es acotada, si y sólo si existen

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, tal que $k_1 \leq a_n \leq k_2, \forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 17.-

1) La sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es acotado, 0 cota inferior y 1 cota superior.

2) La sucesión $\left\{-\frac{1}{n}\right\}$ es acotado, -1 cota inferior y 0 cota superior.

3) La sucesión $\{n^2\}$ es acotado inferiormente y no superiormente.

4) La sucesión $\{-2n\}$ no es acotado inferiormente pero es acotado superiormente.

5) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ es acotado, 0 cota inferior y 1 cota superior.

Definición 7.- Si A es una cota inferior de una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y si A tiene la propiedad de que para cada cota inferior C de $\{a_n\}_{n\geq 1}, C \leq A$. entonces A se llama máxima cota inferior de la sucesión. Análogamente. si B es una cota superior de una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y si B tiene la propiedad de que para cada cota superior D de $\{a_n\}_{n\geq 1}, B \leq D$. entonces B se llama mínima cota superior de la sucesión.

Teorema 5.- Toda sucesión acotada y monótona es convergente. Si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es creciente (decreciente), entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\} \qquad (\inf\{a_n\})$$

Observación 2.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente y supongamos que D es cota superior de esta sucesión. entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n \leq D$

Observación 3.- Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente y supongamos que C es una cota inferior. Entonces $\{a_n\}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty} a_n \geq C$

Teorema 6.- Una sucesión monótona convergente es acotada.

Ejemplo 18.- Pruebe que la sucesión $\sqrt{2}.\sqrt{2\sqrt{2}}.\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ ... converge a 2

Solución

Sean $a_1 = \sqrt{2},\ \ a_2 = \sqrt{2a_1}, \dots, a_n = \sqrt{2a_{n-1}},\ \ n > 1$

Por demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente por 2.

La prueba se hace por inducción matemática.

$a_n \leq 2\ \ \text{y}\ \ a_n \leq a_{n+1},\ \ \forall n \in \mathbb{N}$

i) Para $n = 1,\ \ a_1 = \sqrt{2} < 2\ \ \text{y}\ \ a_1 = \sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} = a_2$

ii) Supongamos que para $n = h,\ \ a_h \leq 2\ \ \text{y}\ \ a_h \leq a_{h+1}$

iii) Probaremos para $n = h + 1;\ \ \ a_{h+1} = \sqrt{2a_h} \leq \sqrt{4} = 2$, pues $2a_h \leq 4$ (hipótesis inductiva).

Entonces $a_{h+1} \leq 2\ \ \text{y}\ \ a_{h+1} = \sqrt{a_{h+1}^2} = \sqrt{2a_h} \leq \sqrt{2a_{h+1}} = a_{h+2}$

Por tanto, la sucesión converge a 2.

Una forma algebraica de determinar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ es el siguiente:

Se toma $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces dado que $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$ se tiene

$L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}} = \sqrt{2L} \Leftrightarrow L = \sqrt{2L}$. Ahora, al elevar al cuadrado ambos miembros y despejando L se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = 2$

Ejemplo 19.- Suponiendo que $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$ y $a_1 = \sqrt{5}$, halle $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Solución

Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Entonces, dado que $a_{n+1} = \sqrt{5 + a_n}$, se tiene $L = \sqrt{5 + L}$

Al elevar al cuadrado ambos miembros y al despejar $L > 0$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{2L}}{2}$$

EJERCICIOS

1.- Encuentre la expresión más simple para el n-ésimo término de las sucesiones que se dan a continuación. Diga si las sucesiones son o no convergentes, de serlo halle el límite.

a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$ b) $\left\{2, 1, 2, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{4}, 2, \frac{15}{8}, \dots\right\}$

Sugerencia para b) $a_n = \begin{cases} 2\ , & si\ n\ impar \\ \dfrac{2^{n/2}-1}{2^{(n-2)/2}} & ,si\ n\ par \end{cases}$

c) $1, \dfrac{2}{2^2-1^2}, \dfrac{3}{3^2-2^2}, \dfrac{4}{4^2-3^2}, \dots$

d) $\left\{0, \dfrac{\ln 2}{2}, \dfrac{\ln 3}{3}, \dots\right\}$ e) $\left\{0, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{2}{3^2}, \dfrac{3}{4^2}, \dots\right\}$

f) $\left\{sen\ 1°, \dfrac{sen\ 2°}{2}, \dfrac{sen\ 3°}{3}, \dots\right\}$ g) $\left\{2, 1, \dfrac{2^3}{3^2}, \dfrac{2^4}{4^2}, \dfrac{2^5}{5^2}, \dots.\right\}$

2.- Determine si la sucesión dada es convergente o divergente. Si la sucesión converge halle su límite.

a) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2-2n+3}\right\}$ b) $\left\{\dfrac{n}{\ln(n+1)}\right\}$ c) $\left\{\dfrac{\ln(3n!)}{(n!)^3}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{\sqrt[3]{n}+4}{\sqrt{n}-1}\right\}$ e) $\left\{\dfrac{3^n+n^4}{4^n-n^5}\right\}$ f) $\{e^{-n} sen\ n\}$

g) $\left\{\dfrac{5+\ln n}{n^2+n}\right\}$ h) $\left\{\dfrac{\tan\left(\dfrac{8}{5n^2+6}\right)}{5n^2+n+3}\right\}$ i) $\left\{\displaystyle\int_0^n x e^{-sx} dx\right\}$

j) $\{\sqrt[n]{n}\}$ **Sugerencia:** $n^{1/n} = e^{\ln n/n} \to 1$

k) $\left\{\sqrt[n]{n^2+n}\right\}$ Sug.: $(n^2+n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(n^2+n)}$ use la regla de L'Hospital

l) $\left\{\dfrac{\ln\left(e^{(n!)^2}\right)+3}{7^{n!}+(n!)^2+5}\right\}$ m) $\left\{\dfrac{6n^2+2n^3 sen\left(\frac{3}{n}\right)}{3n-4n^3 sen\left(\frac{3}{n}\right)}\right\}$ $R. -1$

3.- Determine el límite de la sucesión $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}$ R. 2

4.- Determine si las siguientes sucesiones son crecientes, decrecientes o no monótonas y encuentre el límite de las sucesiones convergentes.

a) $\left\{\dfrac{5^n}{1+5^{2n}}\right\}$ b) $\left\{\dfrac{3n-1}{4n+5}\right\}$ c) $\left\{\dfrac{2^n}{1+2^n}\right\}$

d) $\left\{\dfrac{n!}{3^n}\right\}$ e) $\left\{\dfrac{1}{n+sen\ (n^2)}\right\}$ **Sug.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1+\dfrac{sen\ n^2}{n}} = 0$

f) $\left\{\dfrac{n^n}{n!}\right\}$ g) $\left\{\dfrac{n!}{1.3.5\dots.(2n-1)}\right\}$ h) $\left\{\dfrac{1.3.5\dots.(2n-1)}{2^n, n!}\right\}$

5.- Encuentre los siguientes límites

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$ $R.\ 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ $R.\ 3$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$ $R.\ 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$ $R.\ 1$ **Sugerencia:** Usar $S_n = a\dfrac{1-r^n}{1-r}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$ $R.\ \dfrac{1}{3}$ **Sug.** Usar $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ sen\ (n!)}{n^2+1}$ $R.\ 0$ **Sug.** $\dfrac{-n}{n^2+1} \le \dfrac{n\ sen\ (n!)}{n^2+1} \le \dfrac{n}{n^2+1}$

6.- Halle el límite de las siguientes sucesiones cuyo n-ésimo término se da

a) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}$ $R.\ e$ b) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n+4}\right)^{n}$ $R.\ e$

c) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$ $R.\ \sqrt{e}$ d) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{6n}$ $R.\ e^6$

e) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ $R.\ e$ f) $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n!}\right)^{n!}$ $R.\ e$

7.- Halle el límite de las siguientes sucesiones cuyo n-ésimo término se da.

a) $a_n = n^2\left[\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]$ $R. -\dfrac{1}{2}$

b) $a_n = \dfrac{3n^4 sen^2\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(n+2)\cos\left(\frac{\pi\, n}{4n+1}\right)}$ $R.\ 3\sqrt{2}$

c) $a_n = \sqrt{4n^6+1}\ sen\left(\dfrac{n\pi}{n+1}\right) sen\left(\dfrac{3n\pi}{n+1}\right)\ sen\left(\dfrac{5n\pi}{n+1}\right)$ $R.\ 30\pi^3$

d) $a_{n-1} = \dfrac{1}{5}\left(a_n+\dfrac{5}{a_n}\right),\ \ a_1 = 5$ $R.\ \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

e) $a_n = \dfrac{1}{b}\sqrt[3]{b^2}.\sqrt[9]{b^4}.\sqrt[27]{b^8}\ldots\sqrt[3^n]{b^{2^n}}$ $R.\ b$

f) $a_n = f^{(n)}(2),\ \ f(x) = \ln x$ $R.$ diverge

g) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ $R.\ 1$

h) $a_n = \left[\dfrac{(\sqrt{25})^{1/n} + (\sqrt{40})^{1/n} + (\sqrt{64})^{1/n}}{3}\right]^n$ $\quad R.\ 40$

i) $a_n = \dfrac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n} - \dfrac{5+1}{n}$ $\quad R.\ \dfrac{1}{2}$

j) $a_n = \dfrac{1}{n^2}\left[e^{-1/n^2} + 2e^{-4/n^2} + 3e^{-9/n^2} + \cdots + ne^{-1}\right]$ $\quad R.\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$

8.- Dada la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definida por $a_1 > 1$ y $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}, \forall n \geq 1$, demuestre que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ converge y luego calcule sus puntos de convergencia.

9.- Suponiendo que $a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + 7a_n}$, $a_1 = \sqrt[3]{6}$, halle $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ $\quad R.\ 3$

10.- Una población estable de 90000 aves guaneras viven en cuatro islas cerca de Paracas. Cada año 16% de la población de la isla A emigra a la isla B, 32% de la isla B emigra a la isla C, 8% de la isla C emigra a la isla D y 4% de la población de la isla D emigra a la isla A. Si A_n, B_n, C_n y D_n denotan las cantidades de aves que hay en el año n en las islas A, B, C y D respectivamente, antes de la emigración.

a) Demuestre que $A_{n+1} = 0{,}84A_n + 0{,}04D_n$, $B_{n+1} = 0{,}68B_n + 0{,}16A_n$, $C_{n+1} = 0{,}92C_n + 0{,}32B_n$ y $D_{n+1} = 0{,}96D_n + 0{,}08C_n$

b) Suponiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} D_n$ existen, calcule el número de aves guaneras que habrá en cada isla dentro de muchos años.

R. 12000 en A, 6000 en B, 24000 en C y 48000 en D.

11.- Un paciente ingiere 20 mg. (miligramos) de un medicamento al día. Si el 90% del fármaco acumulado es eliminado diariamente por las funciones corporales, escriba el n-ésimo término de la sucesión $\{a_n\}$ donde a_n es la cantidad del medicamento presente en el cuerpo del paciente, inmediatamente después de la enésima dosis. $\quad$ R. $20 + 0{,}10a_{n-1}$

12.- En un programa para erradicar una plaga en la hacienda Chocavento de Acarí, se liberan cada día N moscas machos esterilizadas y el 80% de ellas sobrevive al terminar el día.

a) Demuestre que el número de moscas esterilizadas en la población a los n días es $N + (0{,}8)N + \cdots + (0{,}8)^{n-1}N$

b) Si el objetivo a largo plazo del programa es mantener 30000 machos esterilizados en la población, ¿cuántas moscas deben liberarse cada día?

R. 6000.

7.2 SERIES INFINITAS DE NÚMEROS REALES

Definición 8.- Sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales. La suma infinita de los elementos de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ se llama serie infinita de números reales, es decir,

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n + \cdots$$

es una serie infinita de números reales, donde $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ son llamados términos de la serie infinita.

La sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ definida por

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

se denomina sucesión de sumas parciales de la serie, donde S_n es la n-ésima suma parcial.

Definición 9.- Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es sumable, si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n\geq 1}$ converge. En este caso se denota por

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

S recibe el nombre de suma de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$.

Observación 4.- Si la sucesión $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es convergente, convencionalmente se sustituye por la afirmación de que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente ; si $\{S_n\}_{n\geq 1}$ es divergente, entonces decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

PROPIEDADES DE SERIES INFINITAS

Teorema 7.- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes con sumas a y b respectivamente, y si c es un número real, entonces

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a \pm b$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Hasta ahora no se tiene un procedimiento matemático para determinar si una serie infinita converge o diverge, más aún en el caso convergente, no se sabe cómo calcular su suma. Comenzamos el estudio de convergencia y divergencia de series, enunciando un método sencillo que se usa para la divergencia de una serie.

Teorema 8.- (Criterio del n-ésimo término para la divergencia de una serie).

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

De forma equivalente, si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie diverge.

Ejemplo 20.- Determine cuáles de las siguientes series es divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+3}{\ln(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+6}{3n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Solución

Para las series dadas en b) y d), se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} = 0$$

Luego, el criterio del n-ésimo término no decide con respecto a la convergencia o divergencia de la serie. En los otros casos, se tiene:

Para las series a), c) y e) se verifica $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+3}{\ln(n+1)} = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{7n+6}{3n+1} = \frac{7}{3}$ y $\lim_{n\to\infty}\left(3 - sen\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 3$, respectivamente; entonces, por el criterio de n-ésimo término se concluye que las series dadas en a), c) y e) divergen.

Ejemplo 21.- Utilice la sucesión de sumas parciales para determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(5n-3)(5n+2)}$ converge o diverge. Si converge, calcule su suma.

Solución

La n-ésima suma parcial de la serie es

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{7}{(5i-3)(5i+2)}$$

Ahora, al descomponer el i-ésimo término de la suma parcial en fracciones parciales, se tiene

$$\frac{7}{(5i-3)(5i+2)} = \frac{A}{5i-3} + \frac{B}{5i+2} \iff 7 = A(5i+2) + B(5i-3) \ (*)$$

Para $i = \frac{3}{5}$ en (*), se obtiene $A = \frac{7}{5}$

Para $i = -\frac{2}{5}$ en (*), se obtiene $B = -\frac{7}{5}$

Luego, al aplicar la propiedad telescópica de sumatorias, se tiene

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{7}{(5i-3)(5i+2)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{7}{5}\left(\frac{1}{5i-3} - \frac{1}{5i+2}\right)$$

$$= -\frac{7}{5}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{5i+2} - \frac{1}{5i-3}\right) = -\frac{7}{5}\left(\frac{1}{5n+2} - \frac{1}{5-3}\right) = \frac{7n}{2(5n+2)}$$

Así, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(5n-3)(5n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7n}{10n+4} = \frac{7}{10}$$

Por tanto, la serie dada es convergente y converge a $\frac{7}{10}$.

Ejemplo 22.- Halle una fórmula para la suma de los n primeros términos de la serie dada y determine la suma de la serie $\frac{10}{2.3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{13}{3.4}\cdot\frac{1}{4^2} + \frac{16}{4.5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots$

Solución

Para la serie dada, se tiene

$$\frac{10}{2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{13}{3.4}\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{3n+7}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{4^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{4^n}$$

Así, la n-ésima suma parcial de la serie es

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{3i+7}{(i+1)(i+2)}\cdot\frac{1}{4^i}\right]$$

Al descomponer el i-ésimo término de esta suma parcial, se obtiene

$$\frac{3i+7}{(i+1)(i+2)}=\frac{4}{i+1}-\frac{1}{i+2}$$

De donde, la expresión para S_n es

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)\frac{1}{4^i}=-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{4^i(i+2)}-\frac{1}{4^{i-1}(i+1)}\right]$$

$$=-\left(\frac{1}{4^n(n+2)}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4^n(n+2)}\right)$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{1}{4^n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4^n(n+2)}\right)=\frac{1}{2}$$

Por tanto, la serie dada es convergente y su suma es $1/2$.

SERIE GEOMÉTRICA

Definición 10.- Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots\quad(a\neq 0)$$

se denomina serie geométrica de razón r.

Teorema 9.- La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}$ converge. si $|r|<1$ y diverge si $|r|\geq 1$. Para el caso convergente la suma de la serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty}ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}$$

Ejemplo 23.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3^n}$ es convergente o divergente.

Solución

Como la serie tiene la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots$$

se deduce que es una serie geométrica con $a=\frac{8}{3}$ y $r=\frac{1}{3}<1$

Por lo tanto, la serie converge y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{3^n}=\frac{8/3}{1-1/3}=4$$

Ejemplo 24.- Exprese cada decimal periódico como el cociente de dos enteros.

a) 0,535353… b) 0,012012012… c) 0,123123123…

d) 0,142857142857… e) 1,23422342…

Solución

a) Sea $A=0{,}5353535\ldots=0{,}53+0{,}0053+0{,}000053+\cdots$

$$=\frac{53}{100}+\frac{53}{100^2}+\frac{53}{100^3}+\cdots=\frac{53}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\cdots\right)$$

La suma de la serie geométrica es $S=\dfrac{1}{1-\frac{1}{100}}=\dfrac{100}{99}$

Por tanto, $A=\dfrac{53}{100}\left(\dfrac{100}{99}\right)=\dfrac{53}{99}$

b) En este caso, se tiene

$$A=0{,}012012012\ldots=0{,}012+0{,}000012+\cdots$$

$$=\frac{12}{1000}+\frac{12}{1000^2}+\frac{12}{1000^3}+\cdots=\frac{12}{1000}\left(1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{12}{1000}\left(\frac{1000}{999}\right)=\frac{12}{999}=\frac{4}{333}$$

c) El decimal periódico se escribe como

$$A=0{,}123123123123\ldots=0{,}123+0{,}000123+\cdots$$

$$=\frac{123}{1000}\left(1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{1000^2}+\cdots\right)=\frac{123}{1000}\left(\frac{1000}{999}\right)=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}$$

d) El decimal periódico se escribe como

$$A=0{,}142857142857\ldots$$

$$=\frac{142857}{1'000000}+\frac{142857}{1'000000^2}+\cdots=\frac{142857}{1'000000}\left(1+\frac{1}{1'000000}+\cdots\right)$$

$$=\frac{142857}{1'000000}\left(\frac{1'000000}{999999}\right)=\frac{142857}{999999}=\frac{5291}{37037}$$

e) El decimal periódico se escribe como

$$A = 1{,}234234234234\ldots$$
$$= 1 + 0{,}234 + 0{,}000234 + \cdots = 1 + \frac{234}{1000} + \frac{234}{1000^2} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{234}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000^1} + \frac{1}{1000^2} + \cdots\right)$$
$$= 1 + \frac{234}{1000}\left(\frac{1000}{999}\right) = \frac{137}{111}$$

Ejemplo 25.- Calcule $\sum_{n=1}^{\infty}\left[5\left(\frac{1}{9}\right)^n - 7\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$

Solución

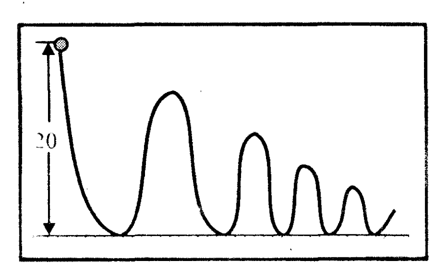
La series geométricas de cada término

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[5\left(\frac{1}{9}\right)^n - 7\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n - 7\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

tienen como razón a $r = \frac{1}{9}$ y $r = \frac{1}{4}$. Como $|r| < 1$, la serie dada converge, y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[5\left(\frac{1}{9}\right)^n - 7\left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 5\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n - 7\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 5\left(\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right) - 7\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$
$$= -\frac{41}{24}$$

Ejemplo 26.- Se deja caer una pelota de una altura de 20m. Cada vez que toca el suelo rebota hasta tres cuartos de su altura máxima anterior. Encuentre la distancia total que viaja la pelota antes de llegar a reposo.



Solución

La distancia vertical total que viaja la pelota está dado por

$$d = 20 + 2\left(\frac{3}{4}(20)\right) + 2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2(20)\right) + \cdots + 2\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n(20)\right) + \cdots$$
$$= 20 + 40\left[\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots\right]$$
$$= 20 + 40\left[\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right] = 140m$$

EJERCICIOS

1.- Determine si las siguientes series convergen o divergen. Proporcione las sumas de las series que convergen.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{3^k}$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} 5^{2/k}$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{2k+1}}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{5^k}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7^{n-1}}$ *R.* $\frac{35}{6}$

g) $\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\pi}{\sqrt{2^{n-1}}} + \cdots$ *R.* $\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

2.- Exprese cada decimal periódico como el cociente de dos enteros

a) 0,4444... b) 0,232323... c) 0,612612612...

3.- Escriba los cuatro primeros términos de la serie infinita dada y determine que la serie es divergente.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+3}{2n^2+n+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^n}{n^3}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} sen\,(\pi n)$

4.- En los siguientes ejercicios, encuentre los 4 términos de la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ y halle una fórmula para S_n en términos de n. Determine también si la serie infinita es convergente o divergente, y si es convergente encuentre su suma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ *R.* $\frac{1}{2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ *R.* 1

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$ *R.* $\frac{3}{2}$

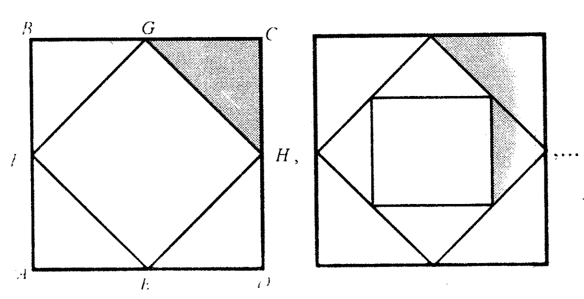
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$ *R.* 1 h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ *R.* 1

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)((n+2)(n+3)}$ *R.* $\frac{1}{4}$ j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)\right]}{[\ln n^n][\ln(n+1)^{n+1}]}$

Nota. Estas series son series telescópicas.

5.- Cuatro personas A, B, C y D dividen una naranja de la siguiente manera: primero la dividen en cinco partes y cada uno toma un quinto; después dividen la quinta parte sobrante en cinco partes y cada quien toma uno, y así sucesivamente. Demuestre que cada uno obtiene un cuarto de la naranja.

6.- Suponga que el cuadrado ABCD tiene lados de 4 cm de largo y que E, F, G y H son los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD. Un nuevo cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado EFGH y dos de los triángulos fuera del tercer cuadrado están sombreados (ver figura adjunta). Determine el área de las regiones sombreadas, si este proceso se repite indefinidamente.



7.- Dada la serie $\frac{2(5)}{7(3)}+\frac{2^2(11)}{9(5)}+\frac{2^3(17)}{11(7)}+\cdots$, encuentre una fórmula para la n-ésima suma parcial de la serie, luego determine si la serie converge o diverge. R. diverge.

8.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{96n+148}{7^{n+2}(2n+3)(2n-1)}$ converge o diverge.

SERIE ARMÓNICA DE ORDEN p

Definición 11.- Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

se denomina serie armónica de orden p. donde $p\in\mathbb{R}$.

Teorema 10.- La serie armónica de orden p, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ diverge si $p\leq 1$ y converge si $p>1$.

Demostración. Ver sección 7.3, ejemplo 48.

Ejemplo 27.-

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, pues $p = \frac{3}{2} > 1$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge, pues $p = \frac{1}{3} < 1$

c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, pues $p = 1 \leq 1$

Las series armónica de orden p se usan con frecuencia para comparar con otras series.

7.3 SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS: CRITERIOS DE CONVERGENCIA

I) CRITERIO DE ACOTACIÓN

Teorema 11.- Una serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, si y sólo si la sucesión de sumas parciales tiene una cota superior.

Demostración ($\Leftarrow$)Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ la n-ésima suma parcial de la serie, entonces $a_n = S_n - S_{n-1} \geq 0$, pues los términos de la serie son positivos, luego la sucesión $\{S_n\}$ es una sucesión creciente. Por hipótesis, esta sucesión tiene una cota superior, sigamos M, entonces $S_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es monótona y acotada, entonces la sucesión $\{S_n\}$ es convergente y además $S_n \to S \leq M$

Ejemplo 28.- Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es convergente

Solución

Sea $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \cdots + \frac{1}{1.2.3.n} + \cdots$

Ahora, al comparar esta serie con la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\text{, se tiene}$$

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \forall k = 1,2, \dots \text{ Entonces, } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2\text{, pues}$$

la serie geométrica converge a 2.
Luego, $S_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$
Por tanto, por el criterio de acotación la serie dada, es convergente.

II) CRITERIO DE COMPARACIÓN

Teorema 12.- Suponga que existe un entero positivo N, tal que $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n > N$.

i) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración.

i) Sean $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ y $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, n-ésimas sumas parciales de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Además $0 \leq S_n \leq T_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces la sucesión $\{T_n\}$ es convergente y por tanto acotada. Así, $\{S_n\}$ es acotada. Luego, por el criterio de acotación la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

ii) Es consecuencia lógica de la parte i).

Ejemplo 29.- Estudie la convergencia de la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$

Solución

Puesto que $\ln k < k$ para todo $k \geq 2$, entonces $\dfrac{1}{\ln k} > \dfrac{1}{k}, \forall k \geq 2$. Como la serie armónica $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ es divergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ es divergente.

Ejemplo 30.- Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + sen^3(n+1)}{2^n + n^2}$

Solución

Puesto que $-1 \leq sen^3(n+1) \leq 1$, entonces $0 < \dfrac{2 + sen^3(n+1)}{2^n + n^2} \leq \dfrac{3}{2^n + n^2}$

Por otro lado, $2^n + n^2 \geq 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{1}{2^n + n^2} \leq \dfrac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$

Luego, $0 < \dfrac{2 + sen^3(n+1)}{2^n + n^2} \leq \dfrac{3}{2^n}$. Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es una serie geométrica convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + sen^3(n+1)}{2^n + n^2}$ es convergente.

Ejemplo 31.- Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + sen^2(n^3)}$

Solución

El n-ésimo término de la serie es prácticamente $\dfrac{1}{2^n}$, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^n - 1 + sen^2(n^3)}}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 1 + sen^2(n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{sen^2(n^3)}{2^n}} = 1$$

Si elegimos un número cualquiera $c > 1$, entonces se cumple

$$0 < \frac{1}{2^n - 1 + sen^2(n^3)} \leq c\frac{1}{2^n}, \text{ para } n \text{ suficientemente grande.}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{2^n}$ es convergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1 + sen^2(n^3)}$ es convergente.

Ejemplo 32.- Determine la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Solución

Como $n^2 \geq n+1, \forall n \geq 2$, entonces $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ es divergente, pues la serie dominada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente.

Teorema 13.- Si $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ es una sucesión de números positivos tal que $\lim_{n \to \infty} C_n = C$, $C > 0$, entonces las dos series de términos positivos

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} C_k a_k$ convergen o divergen simultáneamente.

Demostración.

Como $\lim_{n \to \infty} C_n = C > 0$, existe un número N tal que $\frac{C}{2} < C_k < \frac{3C}{2}$, $\forall k \geq N$

Luego, $\frac{C}{2} a_k < C_k a_k < \frac{3C}{2} a_k$. Si $k \geq N$ y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces

también converge $\sum_{k=1}^{\infty} C_k a_k$. Recíprocamente, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} C_k a_k$ es convergente

también lo es $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{2} a_k$ y a su vez $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{2}{C} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C}{2} a_k$. Esto demuestra que

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. A su vez, esto implica que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge si y sólo si

$\sum_{k=1}^{\infty} C_k a_k$ diverge.

Ejemplo 33.- Estudie la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k(2k-1)}$

Solución

La serie propuesta se puede escribir en la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k(2k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}}\right] \frac{1}{k}$$

Como $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}} = \dfrac{1}{2} > 0$ y la serie armónica $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ diverge, entonces la serie

dada diverge.

Ejemplo 34.- Examine la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(2n+1)}}$

Solución

La serie propuesta se puede escribir en la forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n(2n+1)}} \dfrac{1}{n}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n(2n+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > 0$ y la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge, entonces

la serie propuesta diverge.

Teorema 14.- (Criterio de comparación en el límite del cociente).

Sean $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Entonces se tiene:

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$, y si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Ejemplo 35.- Estudie la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^4}{5n^5+4}$

Solución

Sean $a_n = \dfrac{n^4}{5n^5+4}$ y $b_n = \dfrac{1}{n}$, donde la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ es divergente.

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{5n^5+4} = \frac{1}{5} > 0$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{5n^5+4}$ diverge.

Observación 5.- Para aplicar el criterio de comparación en el límite del cociente a una serie dada al utilizar las series armónicas u otras series, es necesario escoger en cada caso la serie correcta de modo que el término n-ésimo sea de la misma grandeza que el de la serie dada. Por ejemplo:

i) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n^3+n+8}$, elegir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

ii) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-8n+4}{2n^7+6n+1}$, elegir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

iii) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+4}}{\sqrt[5]{n^{10}+n^4+1}}$, elegir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

iv) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+\cos 3n}{e^{4n}+n^2+3}$, elegir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^{4n}}$

v) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n!+2\cos(1/n)}{7^{n!}+\arctan(5n)}$, elegir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{7^{n!}}$

Esto es, para encontrar una serie para comparar, se debe despreciar en el numerador y denominador del término n-ésimo de la serie dada todas las expresiones de menor cuantía, excepto las de magnitud máximo.

Ejemplo 36.- Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{5}{n}\right)$ converge o diverge.

Solución

Al comparar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{5}{n}\right)$ con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armónica divergente), se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty} sen\left(\frac{5}{n}\right).\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{sen\left(\frac{5}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=5\lim_{n\to\infty}\frac{sen\left(\frac{5}{n}\right)}{\frac{5}{n}}=5(1)=5$$

Por el criterio de comparación en el límite del cociente, se deduce que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{5}{n}\right)$ diverge.

Ejemplo 37.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2.5^n+7}{9n^6+2n}$ converge o diverge.

Solución

Al depreciar todas las expresiones de menor cuantía, salvo las de magnitud máxima en el numerador y en el denominador, se compara las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2.5^n+7}{9n^6+2n} \quad \text{con} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^4}$$

Por el criterio del n-ésimo término para la divergencia, la segunda serie diverge.

pues $\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^4}=+\infty$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2.5^n+7}{9n^6+2n}\right)\left(\frac{n^4}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{7}{5^n n^2}\right)}{9+\left(\frac{2}{n^5}\right)}=\frac{1}{9},$$

entonces la serie dada diverge.

Ejemplo 38.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sqrt[3]{n^7}+8}{3n^4+22\sqrt[3]{n}+2}$ converge o diverge.

Solución

Al depreciar todas las potencias de n, salvo las de máxima cuantía en el numerador y en el denominador, se compara las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sqrt[3]{n^7}+8}{3n^4+22\sqrt[3]{n}+2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n^7}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}$$ (serie armónica de orden $\frac{5}{3}$ convergente).

Como,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5\sqrt[3]{n^7}+8}{3n^4+22\sqrt[3]{n}+2}\right)\left(\frac{n^{5/3}}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+8n^{5/3}}{3n^4+22\sqrt[3]{n}+2}=\frac{5}{3},$$

entonces por el criterio de comparación en el límite del cociente, la serie dada converge.

Ejemplo 39.- Determine si la serie $\sum_{n=22}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sqrt[3]{n}}$ converge o diverge.

Solución

Al comparar la serie

$$\sum_{n=22}^{\infty} \frac{tan\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sqrt[3]{n}} \text{ con } \sum_{n=22}^{\infty} \frac{1}{n^{10/3}} \text{ (serie armónica convergente), se tiene}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\tan\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sqrt[3]{n}}\right) \cdot \left(\frac{n^{10/3}}{1}\right) = \lim_{n\to\infty} n^3 \tan\left(\frac{1}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1$$

Por tanto, la serie dada converge.

III) CRITERIO DEL COCIENTE

Teorema 15.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y suponga que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, entonces:

i) Si $r < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $r > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge o cuando $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$

iii) Si $r = 1$, el criterio no decide y debe recurrirse a otro criterio.

Ejemplo 40.- Determine la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Solución

Para esta serie, se tiene $a_n = \frac{n}{2^n}$ y $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$ y

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(n+1)}{n2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, la serie dada es convergente.

Ejemplo 41.- Estudie la convergencia de la serié $3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\frac{3^5}{5!}\ldots$

Solución

El n-ésimo término de la serie es $a_n=\frac{3^n}{n!}$ y $a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}n!}{3^n(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$,

entonces la serie es convergente.

Ejemplo 42.- Estudie la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

Solución

Para esta serie se tiene $a_n=\frac{n!}{n^n}$ y $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

entonces la serie dada es convergente.

Ejemplo 43.- Determine si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{6n}+3\cos 6n}{3^{n!}+\arctan n!}$ converge o diverge.

Solución

Al despreciar todas las expresiones de menor cuantía, salvo las de magnitud maxima, comparamos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{6n}+3\cos 6n}{3^{n!}+\arctan n!}\quad\text{con la serie}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{6n}}{3^{n!}}$$

Para la segunda serie, se tiene

$$b_n=\frac{e^{6n}}{3^{n!}},\quad b_{n+1}=\frac{e^{6(n+1)}}{3^{(n+1)!}}\quad y\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^6}{3^{nn!}}=0<1$$

Luego, por el criterio del cociente esta serie es convergente.

Como

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{6n}+3\cos 6n}{3^{n!}+\arctan n!}\right)\left(\frac{3^{n!}}{e^{6n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{6n}+3\cos 6n}{e^{6n}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n!}}{3^{n!}+\arctan(n!)}=(1)(1)=1,$$

entonces por el criterio de comparación, la serie dada es convergente.

IV) CRITERIO DE LA RAÍZ

Teorema 16.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, tal que $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=R$

Entonces:

i) Si $R<1$, la serie es convergente.

ii) Si $R>1$, la serie es divergente.

iii) Si $R=1$, el criterio no decide y debe recurrirse a otro criterio.

Ejemplo 44.- Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n$

Solución

Para esta serie, se tiene

$$a_n=\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^n \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$$

Por tanto, por el criterio de la raíz, la serie dada es convergente.

Ejemplo 45.- Determine la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{7^n}$

Solución

Para la serie, se verifica

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{10}}{7^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{10/n}}{7}=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{10}{n}\ln(n)}=\frac{1}{7}e^0=\frac{1}{7}<1$$

Luego, por el criterio de la raíz, la serie converge.

Ejemplo 46.- Determine la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln n]^n}$

Solución

Para esta serie, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{[\ln n]^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

Luego, por el criterio de la raíz, la serie dada converge.

Ejemplo 47.- Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3[\sqrt{2}+2]^n}{3^n}$

Solución

Para la serie, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3[\sqrt{2}+2]^n}{3^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/n}(\sqrt{2}+2)}{3} = \frac{\sqrt{2}+2}{3} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{3\ln n}{n}} = \frac{\sqrt{2}+2}{3} > 1$$

Por tanto, la serie es divergente.

V) CRITERIO DE LA INTEGRAL

Teorema 17.- Sea f una función positiva, continua y decreciente para $x \geq 1$, y $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces,

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge o diverge de acuerdo con que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge o diverge.

Ejemplo 48.- La serie p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$

Solución

Para esta serie, se tiene $f(x) = \frac{1}{x^p}$ y

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{A\to\infty} -\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{A^{p-1}} - 1\right) = \frac{1}{p-1}, \text{ si } p > 1 \text{ (ó } \infty \text{ si } p < 1)$$

Por tanto, por el criterio de la integral, si $p > 1$ la serie p converge y si $p < 1$ la serie p diverge. Para $p = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica que es divergente.

Ejemplo 49.- Determine si la siguiente serie converge o diverge $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$

Solución

La función $f(x) = \frac{x}{e^x} = xe^{-x}$ es positiva y continua para $x \geq 1$ y

$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$

Así, $f'(x) < 0, \forall x > 1$. Luego, la función f satisface las condiciones para el criterio de la integral y se tiene

$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A xe^{-x}dx = \lim_{A \to +\infty} [2e^{-1} - (A + 1)e^{-A}] = 2e^{-1}$$

Por tanto, la serie dada es convergente.

Ejemplo 50.- Determine la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 1)\ln(k + 1)}$

Solución

La función $f(x) = \frac{1}{(x + 1)\ln(x + 1)}$ es positiva y continua para $x \geq 1$ y

$$f'(x) = -\frac{1 + \ln(x + 1)}{[(x + 1)\ln(x + 1)]^2}$$

Así, $f'(x) < 0, \forall x \geq 1$. Luego, la función f satisface las condiciones para el criterio de la integral y se tiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x + 1)\ln(x + 1)} = \lim_{A \to +\infty} \int^A \frac{dx}{(x + 1)\ln(x + 1)}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} [\ln(\ln(A + 1)) - \ln(\ln 2)] = +\infty$$

Por tanto, la serie es divergente.

Ejemplo 51.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^4}$ converge o diverge.

Solución

La función $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$ es positiva y continua para $x\geq 1$ y

$$f'(x)=\frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}<0, \forall x\geq 1$$

Luego, la función f satisface las condiciones para el criterio de la integral y se tiene

$$\int_1^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^4}=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{xdx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}\left[\arctan(A^2)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{8}$$

Por consiguiente, la serie dada converge.

VI) CRITERIO DE RAABE

Teorema 18.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, tal que

$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right]=L$. Entonces se tiene:

i) Si $L>1$, entonces la serie es convergente.

ii) Si $L<1$, entonces la serie es divergente.

iii) Si $L=1$, el criterio no decide.

Ejemplo 52.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+2}$ es convergente o divergente.

Solución

Para la serie, se tiene

$a_n=\dfrac{1}{n^3+2}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^3+2}$ y $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$. Luego, no es posible aplicar el criterio del cociente. Al aplicar el criterio de Raabe, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+3n^2+n}{(n+1)^3+2}=3>1$$

Por tanto, la serie dada converge.

Ejemplo 53.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3-1}{2n^3+3}$ es convergente o divergente.

Solución

Al aplicar el criterio de Raabe, se tiene

$$a_n = \frac{n^3 - 1}{2n^3 + 3}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^3 - 1}{2(n+1)^3 + 3}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{-n^3 - 15n^2 - 15n - 4}{(n^3 - 1)(2(n+1)^3 + 3)}\right) = 0 < 1$$

Por consiguiente, la serie dada es divergente.

EJERCICIOS

Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3}$ converge: Criterio de la integral
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}$ converge: Criterio de la integral
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$ converge
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1.3.5 \ldots\ldots (2n-1)}$ converge: Criterio del cociente
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-3)(4n-1)}$ diverge: Criterio de la integral
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1}\ln(4n+1)}{n(n+1)}$ converge: Criterio de comparación en el límite.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen\ (nx)|}{n^2}$ converge: Criterio de comparación.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+2)!}$ converge: Criterio del cociente.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$ converge.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^3 - 1}$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2\left(n\frac{\pi}{3}\right)}{2^n}$ converge: Criterio del cociente y comparación.
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln n\,[\ln(\ln n)]^p}$ C.integral. Converge si $p > 1$, diverge si $p \leq 1$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n sen\left(\frac{1}{13^n}\right)$ converge. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sec n|}{\sqrt{n}\arctan(n)}$ diverge.

15. $\frac{2}{1.2}+\frac{5}{2.3}.2+\frac{10}{3.4}.2^2+\frac{17}{4.5}2^3+\cdots$ diverge.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+5n\ln n}{\sqrt[5]{n^{24}-20n+10}+5^{6n}}$ converge.

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^8+10e^{\arctan n}}{(\ln 3)^{n!}+\sqrt[3]{n^{15}+7n}}$ converge.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n^9}+2}{3n^3+2\sqrt{n}+8}$ *diverge.* 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge. C.cociente

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ diverge:c.cociente 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$ diverge: C.cociente

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2}{2^n+5n}$ diverge: C.comparación en el límite

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4n^2}{n!+7n}$ converge: C.comparación en el límite

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{e^{n^2}}$ converge: C.raíz 25. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k\ln k\ln(\ln k)}$ diverge

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi k)}{k^2}$ c. C.comparación 27. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k+3}{k}\right)$ diverge:c.integral

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1}$ converge: Criterio de la integral

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!+sen\left(\frac{10}{n}\right)}{5^{n!}+\arctan(3n)}$ converge 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ converge: C.cociente

31. $\sum_{n=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$ converge: C.comparación

32. a) Demuestre que $\int_1^{\infty} \frac{e^y}{y^y}dy$ existe, considerando la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^n$

b) Demuestre que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{[\ln k]^{\ln k}}$ converge, aplicando el criterio de la integral

33.- $\frac{3}{2^2.3^2}+\frac{5}{3^2.4^2}+\frac{7}{4^2.5^2}+\cdots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\cdots$ conv.: C.integral

34.- $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3n}{2n+2}\right)^n+\cdots$ diverge: C.raíz

35.- $\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{3/2}+\cdots+\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}+\cdots$ converge: C.raíz

36.- $1000+\frac{1000.1002}{1.4}+\frac{1000.1002.1004}{1.4.7}+\cdots+\frac{1000.1002\ldots(998+2n)}{1.4.7\ldots(3n-2)}+\cdots$

Converge: c. cociente

37.- $\frac{2}{1}+\frac{2.5.8}{1.5.9}+\cdots+\frac{2.5.8.11\ldots(6n-7)(6n-4)}{1.5.9.13.17..(8n-11)(8n-7)}+\cdots$

converge: C.cociente

38.- $\sum_{n=1}^{\infty} arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge: C.comparación en el límite

39.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ converge: C.comparación $n^3+3n^2+3n\geq n^3$

40.- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n}$ convergente

41.- $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m+1}{(m+2)2^m}$ convergente

42.- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ convergente: C.integral

43.- $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)}{(k+2)2^k}$ converge: C.comparación $\frac{k+1}{(k+2)2^k}<\frac{1}{2^k}$

44.- $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k+1}{\ln(k+2)}$ divergente $\frac{k+1}{\ln(k+2)}>\frac{1}{k}$

45.- $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^2-sen^2(100k)}$ converge

46.- $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{k^4+1}}{k^3\ln k}$ divergente $\frac{\sqrt{k^4+1}}{k^3\ln k}>\frac{1}{k\ln k}$

47.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sec n|}{\sqrt{n}}$ divergente $\frac{|\sec n|}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$

7.4 SERIES ALTERNADAS

Definición 12.- Una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots \text{ y de la forma}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots,$$

donde $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
se denomina serie alternada.

Teorema 19.- Teorema de Leibniz. Si una serie alternada

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$ es tal que sus términos $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n > a_{n+1} > \cdots$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternada es convergente. su suma es positiva y no supera el primer término.

Demostración. En las dos sumas parciales

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1})$$

todos los paréntesis son números positivos, pues $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ por hipótesis.
En consecuencia. la sucesión $\{S_{2n}\}$ es monótona creciente y la sucesión $\{S_{2n+1}\}$ es monótona decreciente.
Luego. $S_{2n} > 0$ y $S_{2n+1} < a_1, \forall n \in \mathbb{N}$. Puesto que $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$, entonces $0 < S_{2n} < S_{2n+1} < a_1, \forall n \in \mathbb{N}$

Luego. las sucesiones $\{S_{2n}\}$ y $\{S_{2n+1}\}$ están acotadas inferiormente por 0 y superiormente por a_1. Por tanto. las sucesiones son convergentes. esto es.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

Así. $\lim_{m\to\infty} S_m = S$, si m adopta valores impares o valores pares o ambos.

Por consiguiente. la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge al valor S, donde $0 < S < a_1$

Ejemplo 54.- Determine si la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente o divergente.

Solución

Para la serie, se tiene

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \text{ y } a_{n+1} < a_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Por tanto, por el teorema de Leibniz la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente.

Ejemplo 55.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$ es convergente o divergente.

Solución

Para la serie, se tiene

$$a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N} \text{ y}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n(n+1)} = 0$$

Por lo tanto, la serie dada es convergente.

Ejemplo 56.- Determine si las siguientes series convergen o divergen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{5n+2}{6n^2-4}\right)$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} n^3 e^{-n^3}$

Solución

a) En muchos casos es muy útil la derivada para probar que $a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

En este caso, se tiene

$$f(x) = \frac{5x+2}{6x^2-4}, \quad f'(x) = \frac{-30x^2-24x-20}{(6x^2-4)^2} < 0, \forall x \geq 1$$

Luego, $f(n) = a_n = \frac{5n+2}{6n^2-4}$ es una función decreciente, esto es,

$$a_n > a_{n+1}, \forall n \geq 1 \text{ y } \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n+2}{6n^2-4} = 0$$

Por tanto, por el teorema de Leibniz la serie dada es convergente.

b) Para la función $f(x) = x^3e^{-x^3}$, se tiene

$$f'(x) = 3x^2e^{-x^3}(1 - x^3) < 0, \forall x \geq 2$$

Luego $f(n) = n^3e^{-n^3}$ es una función decreciente, esto es, $a_n > a_{n+1}, \forall n \geq 2$

y $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n^3e^{-n^3} = 0$

Por consiguiente, por el teorema de Leibniz la serie dada es convergente.

Definición 13.- Se dice que la serie $\sum_{n=1} a_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

Ejemplo 57.- Determine si la serie $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$ es absolutamente convergente.

Solución

La serie $\sum_{n=1} \left|(-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}\right| = \sum_{n=1} \frac{2}{3^n} = 2\sum_{n=1} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ es una serie geométrica convergente. Luego, la serie dada es absolutamente convergente.

Definición 14.- Una serie que es convergente, pero no absolutamente convergente, se denomina condicionalmente convergente.

Ejemplo 58.- Determine si la serie $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n}$ es absolutamente convergente o condicionalmenhte convergente.

Solución

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es una serie armónica divergente, y por el teorema de Leibniz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente, entonces la serie dada es condicionalmente convergente.

Teorema 20.- Toda serie absolutamente convergente es convergente, además, una serie es absolutamente convergente si y sólo si, la serie formada con sus términos positivos y la serie formada con sus términos negativos son ambos convergentes.

La demostración se deja al lector.

Ejemplo 59.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10\, sen\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^{1,1}}$ es convergente o divergente.

Solución

Los primeros términos de la serie son positivos, el sexto es cero, los cinco siguientes negativos, etc. Puesto que

$$-1 \leq sen\left(\frac{n\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{10}{n^{1,1}} \leq \frac{10\, sen\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^{1,1}} \leq \frac{10}{n^{1,1}} \Leftrightarrow \left|\frac{10\, sen\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^{1,1}}\right| \leq \frac{10}{n^{1,1}}$$

y la serie dominante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^{1,1}}$ es convergente, entonces por el criterio de comparación, la serie dada es absolutamente convergente. Por tanto, la serie dada es convergente.

Ejemplo 60.- Determine la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=6}^{\infty} (-1)^n \left[4 + \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

Solución

Por el criterio del n-ésimo término de la serie, se tiene que la serie

$$\sum_{n=6}^{\infty} \left|(-1)^n \left[4 + \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right| = \sum_{n=6}^{\infty} \left(4 + \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ es divergente, pues}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(4 + \tan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 4 \neq 0$$

Además, esta serie no satisface el teorema de Leibniz. Por tanto, la serie dada es divergente.

CRITERIO DE LA RAZÓN ABSOLUTA

Teorema 21.- Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie infinita para la cual $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$. Entonces:

i) Si $r < 1$, la serie es convergente.

ii) Si $r > 1$, la serie es divergente o si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ tambien diverge.

iii) Si $r = 1$, nada se puede concluir acerca de la convergencia.

Demostración. Se deja al lector.

Ejemplo 61.- Pruebe la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{5^n}$

Solución

Para la serie, se tiene

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{5^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^n(n+1)}{5^{n+1}} \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n \frac{n+1}{5^{n+1}}}{(-1)^{n-1} \frac{n}{5^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5} < 1$$

Por tanto, por el criterio de la razón absoluta la serie dada es convergente.

Ejemplo 62.- Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n!}$ es convergente o divergente.

Solución

Para la serie, se tiene

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^n}{n!}, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{y}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)n!}{(n+1)!\, n^n} = \lim_{n\to\infty} = e > 1$$

Por consiguiente, por el criterio de la razón la serie es divergente.

Ejemplo 63.- Determine si la serie converge o diverge $\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+8}$

Solución

Al aplicar el criterio de la razón, se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{\sqrt[3]{n+1}}{n+9}\right)\left(\frac{n+8}{\sqrt[3]{n}}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}}\right)\left(\frac{n+8}{n+9}\right)\right] = 1$$

Luego, por el criterio de la razón no se puede concluir nada acerca de la convergencia de la serie.

Ahora, al considerar $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+8}$ se obtiene

$$f'(x) = \frac{8-2x}{3x^{2/3}(x+8)^2} < 0, \forall x \geq 5$$

Así, $f(n) = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+8} = a_n$ es una función decreciente y $a_n > a_{n+1}, \forall n \geq 5$

Además, por la regla de L'Hospital se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n+8} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3\sqrt[3]{n^2}} = 0$$

Por tanto, por el teorema de Leibniz, la serie dada es convergente.

EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios determine si la serie alternada dada es convergente o divergente o condicionalmente convergente.

1. $\dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} - \dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{5.6} - \cdots$ convergente

2. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}} + \dfrac{1}{4\sqrt{4}} - \dfrac{1}{5\sqrt{5}} + \dfrac{1}{6\sqrt{6}} - \cdots$ convergente

3. $1 - \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} - \dfrac{4}{2^4} + \dfrac{5}{2^5} - \cdots$ convergente

4. $\dfrac{1}{1^2+1} - \dfrac{2}{2^2+1} + \dfrac{3}{3^2+1} - \dfrac{4}{4^2+1} + \cdots$ condicionalmente convergente

5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ convergente

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} sen\left(\frac{\pi}{n}\right)$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+2}$ converge: C.integral

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2}$ converge

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n}$ diverge: C.cociente

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{3n-1}$ cond. converg.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$ converge: C.coc. 12. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ diverge: C.coc.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^2}$ diverg.: C.coc. 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n-1}}{nn!}$ abs.conv.: C.coc.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{1.3.5..(2n-1)}$ converg.: C.coc. 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n\sqrt{n}}$ cond.conv.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2.4.6..(2n)}{1.4.7..(3n-2)}$ converge 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n!)^2 2^n}{(2n)!}$ C.coc.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n^2-9n+4)}{n^3}$ cond. Converg., descomponer en sumas

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln(n+1)}{n+1}$ cond. Converg. C. integral

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$ abs. conv. C.razón 22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$ cond.conv.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$ Abs. convergente: C. raíz

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{7.9.11\ldots(2n+5)}$ diverge: C. razón

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ converg. 26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen\ (n\alpha)}{(\ln 10)^n}$ converge

27. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^3$ convergente: C.razón

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$ conv.: C.raíz 29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(e^n+e^{-n})}$ cond.convergente $2^n+2^{-n}<2e^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\,ln^2(n+1)}$ converge $\frac{1}{n\,ln^2(n+1)}\le\frac{1}{n\,ln^2 n}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^{3/7}}{(n+1)!}$ conv. C.razón 33. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_n^{n+1}\frac{e^{-x}}{x}dx$ conv.c.razón

34. $\sum_{n=1}^{\infty} sen\ (\ln n)$ divergente 35. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-n sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(n\, sen\, \frac{1}{n}\right)$ conv. $n\, sen\, \frac{1}{n} \leq 1$, entonces $\ln\left(n\, sen\, \frac{1}{n}\right) \leq 0$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right)$ convergente: C.integral

38. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\ln n)\right)$ condicionalmente convergente

39. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$ condicionalmente convergente

40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{100}}{2^n}$ converge: C.razón

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(sen\, \frac{1}{n}\right)^{3/2}$ convergente $sen\, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ criterio de comparación

42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$ convergente $sen\, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$, entonces $\frac{sen\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \leq \frac{1}{n^2}$

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - n\, sen\left(\frac{1}{n}\right)}{n}$ converge

45. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^7 7^{k+3}}{2^{3k}}$ converge

46. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\, ln^2 k}$ converge

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n}{4}\pi\right)}{n!}$ converge

48. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^{1/n}$ diverge

49. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \tan\frac{1}{n}$ cond.convergente. C.comparación en el límite

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{1000n + 10^6}$ diverge

51. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(\ln n)^{100}}{n^{3/2}}$.

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{10^6 n + 1}$ condicionalmente convergente

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{n}$ conv. $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} < \frac{1}{2n^{3/2}}$

7.5 SERIES DE POTENCIAS

Definición 15.- Una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots$$

se denomina serie de potencias en x, donde x es una variable. Una serie de potencias en x es lo análogo para series infinitas de lo que es un polinomio en x. En general, una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots + a_k(x-c)^k + \cdots$$

recibe el nombre de serie de potencias en $(x-c)$ o centrada en c.

Teorema 22.- Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ es convergente para $x_1 \neq 0$, Entonces es convergente para todo número x, tal que $|x| < |x_1|$

Demostración.

Como la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n (x_1)^n = 0$

Luego, para $\varepsilon_1 = 1 > 0, \exists N > 0$, tal que $|a_n x_1^n| < 1$, siempre que $n \geq N$

Ahora, si x es cualquier número tal que $|x| < |x_1|$, entonces

$$|a_n x^n| = \left|a_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n}\right| = |a^n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n < \left|\frac{x}{x_1}\right|^n, \forall n \geq N$$

Como la razón $r = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ es convergente.

Luego, por el criterio de comparación, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ es absolutamente convergente para $|x| < |x_1|$.

Por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente para x, tal que $|x| < |x_1|$

Corolario 1.- Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ diverge para un número x_2, entonces diverge para todo número x, tal que $|x| > |x_2|$.

Teorema 23.- Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie de potencias.

Entonces, exactamente una de las siguientes alternativas se cumple:

i) La serie converge solamente para $x = 0$

ii) La serie es absolutamente convergente para todos los valores de x.

iii) Existe un número $r > 0$ tal que la serie es absolutamente convergente para todo x para el cual $|x| < r$ y diverge si $|x| > r$.

Demostración.

i) Si $x = 0$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + 0 + \cdots 0 + \cdots$ es convergente.

ii) Supongamos que la serie dada es convergente para $x = x_1$, donde $x_1 \neq 0$, entonces la serie es absolutamente convergente. $\forall x$ tal que $|x| < |x_1|$. Ahora, si no existe ningún valor de x para el cual la serie dada es divergente, podemos concluir que la serie es absolutamente convergente para todo x real.

iii) Si la serie dada es convergente para $x = x_1$, donde $x_1 \neq 0$ y es divergente para $x = x_2$, donde $|x_2| > |x_1|$: entonces, por el teorema anterior la serie es divergente para todo x para el cual $|x| > |x_2|$.

Luego, $|x_2|$ es la cota superior del conjunto de valores de $|x|$ para el cual la serie es absolutamente convergente.
Por tanto, por el axioma de completez este conjunto de números reales tiene una mínima cota superior r, tal que para todo x para el cual $|x| < r$, la serie es absolutamente convergente.

En general, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 24.- Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$

Entonces, exactamente una de las siguientes alternativas se verifica:

i) La serie solamente converge para $x = c$

ii) La serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) Existe un número $r > 0$, tal que la serie converge $\forall x$ para los cuales $|x - c| < r$ y diverge $\forall x$ para el cual $|x - c| > r$

El valor de r se denomina radio de convergencia de la serie de potencias. Luego, los intervalos de convergencia de la serie de potencias será uno de los siguientes intervalos:

a) $I = \langle c - r; c + r\rangle$ b) $I = \langle c - r; c + r]$

c) $I = [c - r; c + r\rangle$ d) $I = [c - r; c + r]$

Teorema 25.- Si para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = M \quad (0 \leq M < \infty),$$

entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es

$$r = \frac{1}{M}, \text{ donde } r = 0 \text{ si } M = \infty \text{ y } r = \infty \text{ si } M = 0$$

Ejemplo 64.- Encuentre el intervalo de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^{n+1}}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}$ f) $\frac{1}{3}+\frac{(x-2)}{36}+\frac{(x-2)^2}{243}+\cdots+\frac{(x-2)^n}{3^n n^2}+\cdots$

Solución

a) Dado que $a_n = (-1)^n$ y $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 = M$, entonces el radio de

convergencia de la serie es $r = \frac{1}{M} = 1$. Como la serie está centrada en $x = 0$

entonces es convergente para x tal que $|x^2| < 1 = R \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Por tanto, el intervalo de convergencia de las series es $I = \langle 1; 1 \rangle$.

b) Para $a_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$, se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{1}{3} = M$$

Luego, el radio de convergencia de la serie es $r = \dfrac{1}{M} = 3$. Además, la serie diverge para $x = -3$ y $x = 3$. Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie es $I = \langle -3; 3 \rangle$.

c) Sea $a_n = n$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = 1 = M$. Luego, la serie es convergente para todo $x \in I = \langle -1; 1 \rangle$.

d) Para $a_n = (-2)^n \dfrac{n+2}{n+1}$, se tiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}2^{n+1}(n+3)(n+1)}{(-1)^n 2^n (n+2)^2}\right| = 2 = M$$

Así, el radio de convergencia de la serie es $r = \dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{2}$. En los extremos del intervalo las series

$$\left(x = \frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1} \text{ y}$$

$$\left(x = -\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{n+2}{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n+1}$$

divergen. Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie dada es

$$I = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$$

e) Dado que $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n!}$ y $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$

entonces el intervalo de convergencias de la serie es $r = \dfrac{1}{M} = \dfrac{1}{0} = \infty$

Por tanto, la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Al hacer $a_n = \dfrac{1}{3^n n^2}$, se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n n^2}{3^{n+1}(n+1)^2} = \frac{1}{3} = M$$

Luego, el radio de convergencia de la serie es

$r = \frac{1}{M} = 3$. Así, la serie converge si $|x-2| < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

En los extremos del intervalo ($x = -1$ y $x = 5$) las series resultantes son, respectivamente

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que son convergentes.

Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie es $I = [-1; 5]$

Ejemplo 65.- Determine el intervalo de convergencia de las series

a) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n\,(64)^n (x-5)^{3n}}{27^n n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^n \frac{1}{n^4}$

Solución

a) Dado que $a_n = (-1)^{n-1} \frac{\ln n\,(64)^n}{(27)^n n^3}$ y

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 (27)^n \ln(n+1)\,(64)^{n+1}}{(n+1)^3 (27)^{n+1} \ln n\,(64)^n} = \frac{64}{27} = M$$

entonces el radio de convergencia es

$r = \frac{1}{M} = \frac{27}{64}$. Como la serie está centrada en $x = 5$, la serie converge $\forall x$, tal que $|(x-5)^3| < \frac{27}{64} \Leftrightarrow \frac{17}{4} < x < \frac{23}{4}$

Se comprueba fácilmente que para $x = \frac{17}{4}$ y $x = \frac{23}{4}$, las series resultantes convergen. Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie es $I = \left[\frac{17}{4}; \frac{23}{4}\right]$

b) Al hacer $b_n = \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^n \cdot \frac{1}{n^4}$ y utilizar el criterio de la razón, se obtiene

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{n^4}{(n+1)^4}\right| = \left|\frac{x+3}{x+2}\right|$$

Luego, la serie es convergente si $\left|\frac{x+3}{x+2}\right| < 1 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$

En $x = -\frac{5}{2}$ la serie resultante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^4}$ es convergente

Por tanto, el intervalo de convergencia de la serie es $I = \left\langle -\infty; -\frac{5}{2}\right]$

EJERCICIOS

I.-En los siguientes ejercicios encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias dadas.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $R.\langle -\infty; +\infty\rangle$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2}$ $R.\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ $R.0$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$ $R.\langle -9; 9]$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+n}\frac{(x-1)^n}{n}$ $R.\langle 0; 2]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,x^n}{n^n}$ $R.\langle -e; e\rangle$

7. $\sum_{n=0}^{\infty}(senh\ 2n)\,x^n$ $R.\langle -\frac{1}{e^2};\frac{1}{e^2}\rangle$

8. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(\ln n)^2}$ $R.\langle -1; 1]$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1.3.5\ldots(2n-1)x^{2n+1}}{2.4.6\ldots.2n}$ $R.[-1; 1]$

10. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln k\,(x-5)^k}{k+1}$ $R.[4; 6\rangle$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ $R.\langle -\frac{1}{e};\frac{1}{e}\rangle$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x-3)^n$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ $R.\langle 3; +\infty\rangle \cup \langle -\infty; 1\rangle$

14. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ $R.\langle 1; +\infty\rangle$

15. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{\ln x}}$ $R.\langle e; \infty\rangle$ **Sug**. Serie p conv. si $\ln x > 1$

16. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n sen\left(\frac{x}{3^n}\right)$ $R.\langle -\infty; +\infty\rangle$ $Sug.\left|2^n sen\left(\frac{x}{3^n}\right)\right| \le \left|\frac{x2^n}{3^n}\right|$

17. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{e^{nx}}$ $R.\langle 0; +\infty\rangle$

18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n.3^n(x-5)^n}$ $R.\left[\frac{16}{5}; +\infty\right\rangle \cup \left\langle -\infty;\frac{14}{3}\right\rangle$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$ $R.\langle -4; 4\rangle$

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n^2+n}$ $R.\left[0; \frac{2}{3}\right]$

21. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+c)!}{n!\,(n+d)!}x^n$

22. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^n \ln n}$ $R.\langle -2; 2\rangle$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2}x^{n^2}$ $R.\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\rangle$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ $R.\langle -1; 1\rangle$ **Sug.** $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|^{n.n!}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$ $R.\, x=-3$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(x+3)^n}{n^n}$ $R.\langle -e-3; e-3\rangle$

27. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{(k+1)ln^2(k+1)}$ $R.[-2; 0]$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ $R.\langle 2; 4\rangle$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$ $R.\langle 1-\frac{1}{e}; 1+\frac{1}{e}\rangle$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$ $R.\langle -2; 0\rangle$

31. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$ $R.\langle 1; 3]$

32. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\, 2^{n+1}}$ $R.[1; 5\rangle$

33. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ $R.[2; 4]$

34. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n}{n+1}$ $R.\langle -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x+4)^n}{3^n n^2}$ $R.[-7; -1]$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}{2^n(2n)!}$ $R.\langle -6; 10\rangle$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n!\left(\frac{3}{4}\right)^n x^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}$ $R.\langle -\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\rangle$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\ln k\, 2^k x^k}{3^k k^2}$ $R.\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$

II.-En cada uno de los siguientes ejercicios, determine el radio de convergencia de las series de potencias dadas.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $R. r = 2$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ $R. r = 2$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$ $R. r = 2$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{2n}$ $R. r = \frac{1}{2}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} [1-(-2)^n]x^n$ $R. r = \frac{1}{2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, x^n}{n^n}$ $R. r = e$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+1)^n}{n^2+1}$ $R. r = 1$

8. $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} x^n, 0 < a < 1$ $R. r = +\infty$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ $R. r = 4$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} x^n}{n}$ $R. r = 1$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\right)^3 x^n$ $R. r = 1$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ $R. r = \frac{1}{e}$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} [sen\,(an)]x^n, a > 0$ $R. r = +\infty$ si $a = k\pi, k \in \mathbb{Z}, r = 1$ si $a \neq k\pi$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(16)^n (x+7)^{2n}}{(25)^n n^4}$ $R. r = \frac{4}{5}$

OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS

De la sección anterior, se vio que cada serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ define una función f cuya regla de correspondencia está dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

y su dominio es el intervalo de convergencia de la serie.

Teorema 26.- Si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \cdots$$

es una serie de potencias, cuyo radio de convergencia r es no nulo, entonces en el intervalo $I = \langle c-r; c+r \rangle$ se verifica:

a) La función f es diferenciable y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \cdots$$

b) La función f es integrable y

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n(t-c)^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, |x-c| < r$$

c) $f(x)$ y $f^{(n)}(x)$ son continuas para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 66.- La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ es convergente para $|x| < 1$, pues es una serie geométrica y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \text{ si } |x| < 1$$

Cuando se reemplaza en esta serie x por $-x$, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}, \text{ si } |x| < 1$$

y si se reemplaza en la serie dada x por x^2, se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1-x^2}, \qquad |x| < 1$$

De la misma manera, si se reemplaza en la serie dada x por $-x^2$, resulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \ldots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, |x| < 1$$

Ejemplo 67.- Muestre que $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \cdots . si\ |x| < 1$

Solución

De la serie del ejemplo 66, se tiene

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \text{si } |x| < 1$$

Al integrar esta serie término a término, se tiene

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Ejemplo 68.- Aproxime $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ hasta el tercer lugar decimal

Solución

Del ejemplo 67, $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$. Entonces

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0{,}463$$

Ejemplo 69.- Obtenga una representación en serie de potencias de $\frac{1}{(1-x)^2}$

Solución

Del ejemplo 66, se tiene

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \text{si } |x| < 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \cdots, \text{si } |x| < 1$$

Ejemplo 70.- Demuestre que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

Solución

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, donde su dominio es el intervalo de convergencia $\langle -\infty; +\infty \rangle$

Así, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$. Entonces $f(x) = e^x$

Ejemplo 71.- Encuentre una representación en serie de potencia de e^{-x}

Solución

En el ejemplo 70, al hacer el cambio de x por $-x$, se obtiene

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \cdots, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 72.- Encuentre una representación en serie de potencias de $\int_0^x e^{-t^2} dt$

Solución

Se tiene que $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$. Al reemplazar x por t^2, resulta

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} + \cdots$$

Luego,

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\,5} - \frac{x^7}{3!\,7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)} + \cdots$$

Ejemplo 73.- Obtenga una representación en serie de potencias de $\ln(1 + x)$

Solución

Sea $f(t) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$, si $|t| < 1$

Luego, por el teorema 26 c) se obtiene

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \text{ si } |x| < 1$$

Ejemplo 74.- Calcule aprox. con tres cifras decimales el valor de $\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt$

Solución

Del ejemplo 72, se tiene

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + \cdots$$

$$= 0{,}5 - 0{,}04117 + 0{,}0031 - 0{,}0002 + \cdots \cong 0{,}4614$$

Teorema 27.- Dadas las series de potencias

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \ \text{ y } \ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \text{ , se verifica:}$$

$$\text{i) } f(cx)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nc^nx^n \qquad \text{ii) } f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$$

$$\text{iii) } f(x).\,g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \text{ , donde } c_n=\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}$$

Ejemplo 75.- Encuentre una serie de potencias de x que sea convergente a la función $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

Solución

Las series potencias de las funciones $f(x)=\ln(1+x)$ y $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ son respectivamente

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \ \text{ y } \ \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

Luego, al multiplicar estas series, se obtiene

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=x-\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{13x^5}{15}+\cdots,\ \text{si } |x|<1$$

EJERCICIOS

1.- En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentre una serie de potencias de x que converja a la función dada y determine el radio de convergencia.

a. $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ $\qquad$ $R.\dfrac{1}{2}(2+2.3x+3.4x^2+4.5x^3+\cdots)$

b. $\dfrac{\cos x}{1+x}$ $\qquad$ $R.\,1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{13}{24}x^4-\dfrac{13}{24}x^5+\cdots$

c. $\sec x$ $\qquad$ $R.\ 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x^4}{24}+\cdots$, (use divis.)

d. $\dfrac{1-x}{1-x+x^2}$ $\qquad$ $R.\ 1-x^2-x^3+x^5+x^6-x^8-x^9+\cdots$

e. $\dfrac{x^2}{(1-x)(1+x^2)}$ $\qquad$ f. $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ $\qquad$ g. $\dfrac{\ln(1+x)}{2+x}$

2.- En los siguientes ejercicios, se define una función f por una serie de potencias. Encuentre el dominio de f.

$a.\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ $\qquad$ $b.\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

$c.\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $\qquad$ $d.\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n3^n}$

3.- En los siguientes ejercicios calcule el valor de la integral dada con 4 decimales de aproximación.

$a.\ \int_0^1 e^{-x^2}dx$ $\qquad$ $R.\ 0{,}7468$

$b.\ \int_0^{1/4} g(x)dx$, donde $g(x)=\begin{cases}\frac{\arctan x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ $\qquad$ $R.\ 0{,}2483$

$c.\ \int_0^1 f(x)dx$, donde $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & si\ x\neq 0\\ 1, & si\ x=0\end{cases}$ $\qquad$ $R.\ 1{,}3179$

7.6. SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

Una función definida por una serie de potencias posee derivadas de todos los órdenes que se pueden obtener al derivar la serie de potencias término a término de acuerdo al teorema 26 a).

$$\text{Si } f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-c)^k,\ \forall x\in\langle c-r;c+r\rangle, \text{ donde } r \text{ es el radio de}$$

convergencia, entonces resulta

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_k(x-c)^{k-1},\quad f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_k(x-c)^{k-2}, \text{ en general}$$

$$f^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k(x-c)^{k-n},\ \forall x\in\langle c-r;c+r\rangle$$

La función f y sus derivadas tienen todas el mismo radio de convergencia de acuerdo con el teorema de derivadas de series. Al evaluar la función f y sus derivadas en el número c, se obtiene

$f(c)=a_0,\ f'(c)=a_1,\ f''(c)=2a_2$, y en general $f^{(n)}(c)=n!\,a_n$

Así, $a_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ para cada entero positivo n y la serie de potencias que representa a f está dada por

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$

Definición 16.- La serie de potencias que representa a la función f dada por
$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!} + \cdots$$
se denomina desarrollo de f en serie de Taylor alrededor de $x = c$.

Definición 17.- Si $c = 0$, se obtiene el desarrollo de f en serie de Maclaurin alrededor de $c = 0$, esto es,
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Ejemplo 76.- Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = e^x$

Solución

Las derivadas sucesivas de $f(x)$ y sus valores en $x = 0$ son

$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$\cdot \qquad \cdot$

$\cdot \qquad \cdot$

$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1$

Por tanto, la serie de Maclaurin de $f(x) = e^x$ es
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Ejemplo 77.- Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = sen\, x$

Solución

Las derivadas sucesivas de $f(x)$ y sus valores en $x = 0$ son

$f(x) = sen\, x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -sen\, x \qquad f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = sen\, x \qquad f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(0) = 1$

Por consiguiente, el desarrollo de $f(x) = sen\, x$ en serie de Maclaurin es

$$f(x) = sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ejemplo 78.- Encuentre el desarrollo de $f(x) = \ln x$ en serie de Taylor alrededor de $x = 1$.

Solución

Las derivadas sucesivas de $f(x)$ y sus valores en $x = 1$ son

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(3)}(1) = 2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

Luego, el desarrollo de $f(x) = \ln x$ en serie de Taylor alrededor de $x = 1$ es

$$f(x) = \ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

Esta serie converge $\forall x \in \langle 0; 2]$ y diverge para $x > 2$.

Ejemplo 79.- Encuentre el desarrollo de $f(x) = \cos x$ en serie de Taylor alrededor de $x = \pi$.

Solución

Las derivadas sucesivas de $f(x)$ y sus valores en $x = \pi$ son

$$f(x) = \cos x \qquad f(\pi) = -1$$

$$f'(x) = -sen\, x \qquad f'(\pi) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(\pi) = 1$$

$$f^{(3)}(x) = sen\, x \qquad f^{(3)}(\pi) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(\pi) = -1$$

Por tanto, el desarrollo de $f(x) = \cos x$ en serie de Taylor alrededor de $x = \pi$ es

$$f(x) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} - \frac{(x-\pi)^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

La serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 80.- Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{x^2}$ y especifique el intervalo de convergencia.

Solución

La serie de Maclaurin de $g(x) = e^x$ encontrada en el ejemplo 76 es

$$g(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Al sustituir x por x^2 en la serie de e^x. se obtiene la serie de Maclaurin para $f(x) = e^{x^2}$. esto es

$$f(x) = g(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

El intervalo de convergencia de la serie es $I = \langle -\infty; +\infty \rangle$

Ejemplo 81.- Determine la serie de Maclaurin para $f(x) = cos^2 x$

Solución

Las derivadas sucesivas de $g(x) = \cos x$ y sus valores en $x = 0$ son

$g(x) = \cos x$	$g(0) = 1$
$g'(x) = -sen\, x$	$g'(0) = 0$
$g''(x) = -\cos x$	$g''(0) = -1$
$g^{(3)}(x) = sen\, x$	$g^{(3)}(0) = 0$
$g^{(4)}(x) = \cos x$	$g^{(4)}(0) = 1$

Por consiguiente, el desarrollo de $g(x) = \cos x$ en serie de Maclaurin es

$$g(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Como $f(x) = cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$, entonces al sustituir x por $2x$ en la serie de $cos\, x$ resulta

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \cdots$$

Ejemplo 82.- Determine el desarrollo de $f(x) = \cos(\sqrt{x-3})$ en serie de potencias en torno a $x = 3$.

Solución

Al sustituir x por $x - 3$ en la serie de Maclaurin de $cos\, x$, se tiene

$$\cos(x-3) = 1 - \frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{(x-3)^4}{4!} - \frac{(x-3)^6}{6!} + \frac{(x-3)^8}{8!} - \cdots$$

Luego, al reemplazar $x-3$ por $\sqrt{x-3}$ en esta serie se obtiene

$$f(x) = \cos(\sqrt{x-3}) = 1 - \frac{x-3}{2!} + \frac{(x-3)^2}{4!} - \frac{(x-3)^3}{6!} + \frac{(x-3)^4}{8!} - \cdots$$

La serie converge para todo $x \geq 3$.

Ejemplo 83.- Encuentre la serie de Maclaurin para $f(x) = (1+x)^a$, donde a es un número arbitrario y halle su radio de convergencia.

Solución

Las derivadas sucesivas de $f(x)$ y sus valores en $x = 0$ son

$$f(x) = (1+x)^a \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = a(1-x)^{a-1} \qquad f'(0) = a$$
$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \qquad f''(0) = a(a-1)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = a(a-1)\ldots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$
$$f^{(n)}(0) = a(a-1)\ldots(a-n+1)$$

Por tanto, la serie de Maclaurin para esta función llamada serie binomial está dada por

$$f(x) = (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)x^n}{n!} + \cdots$$

Para encontrar el radio de convergencia, se aplica el criterio de la razón, esto es

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a-n}{n+1}\right||x| = |x|$$

Ahora, la serie es convergente si $|x| < 1$ y divergente si $|x| > 1$. Luego, su radio de convergencia es $r = 1$.

Ejemplo 84.- Halle la serie de Maclaurin para $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$

Solución

Al sustituir $a = \dfrac{1}{2}$ en la serie binomial, se obtiene

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2^2 2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}1(3)\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 1(3) \dots |2n-3|}{2^n n!} x^n, si\ |x| < 1$$

Ejemplo 85.- Halle la serie de potencias para $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ en torno a $x = 0$.

Solución

Para la función $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, se tiene $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

Así, para encontrar la serie de potencias de f, solo es necesario encontrar la serie de potencias para $f'(x) = (1 + x^2)^{-1/2}$ e integrar término a término.

Al sustituir $a = -\dfrac{1}{2}$ y x por x^2 en la serie binomial, se tiene

$$(1 + x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1(3)}{2^2 2!}x^4 - \dots + \frac{(-1)^n 1(3) \dots (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + \cdots$$

si $x^2 < 1$

Por tanto, al integrar término a término se obtiene

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}} dt$$

$$= x - \frac{x^3}{2(3)} + \frac{1(3)x^5}{2^2(5)2!} + \dots + \frac{(-1)^n 1(3) \dots (2n-1)}{2^n (2n+1) n!} x^{2n+1} + \cdots$$

Ejemplo 86.- Encuentre la serie de potencias para $f(x) = arcsen\ x$ en potencias de x y determine su radio de convergencia.

Solución

Para la función $f(x) = arcsen\ x$, se tiene que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = (1 - x^2)^{-1/2}$

La serie binomial para $f'(x)$ es

$$f'(x) = (1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{15x^6}{48} + \cdots, si\ |x| < 1$$

Luego, la serie de potencias de $f(x) = arcsen\ x$ es

$$f(x) = arcsen\ x$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \frac{15}{336}x^7 + \cdots, si\ |x| < 1$$

El radio de convergencia de la serie es $r = 1$.

EJERCICIOS

En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentre la serie de potencias para las funciones dadas y muestre su radio de convergencia.

1. $\ln(x+1)$ en serie de potencias de $x-1$ $R.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}, r=1$

2. $\sqrt{x}$ en potencias de $x-4$

$$R.\ 2+\frac{1}{4}(x-4)+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}1.3.5\ldots(2n-3)(x-4)^n}{2.4.6\ldots(2n)4^n}$$

3. $\cos x$ en potencias de $x-\frac{\pi}{3}$

$$R.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{1}{12}\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\cdots, r=+\infty$$

4. sen^2x en potencias de x $R.\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2x)^{2n}}{(2n)!}$

5. $\tan x$ en potencias de $x-\frac{\pi}{4}$ $R.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n}{n!}$

6. $\ln|x|$ en potencias de $x+1$ $R.-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n}, r=1$

7. $senh\ x$ en potencias de x $R.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

8. $\cosh x$ en potencias de x $R.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

9. $\frac{1-\cos x}{x}$ en potencias de x $R.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n)!}, r=\infty$

10. $4x^4-15x^3+20x^2-10x+14$ en potencias de $x+1$

$$R. 63-111(x+1)+89(x+1)^2-31(x+1)^3+4(x+1)^4$$

11. sen^2x en potencias de x

12. 2^x en potencias de x

13. $\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$ en potencias de x $R.\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n2^{n+1})x^n$

Sug. Descomponer en fracciones parciales

$$f(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1+2x}=\sum_{x=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n$$

14. $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ en potencias de $x + 4$

R. $-78 + 59(x+4) - 14(x+4)^2 + (x+4)^3$, $r = \infty$

15. $\frac{1}{x}$ en potencias de $x - 1$ $\quad R. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, (0 < x < 2)$

16. $\frac{1}{x^2}$ en potencias de $x + 1$ $\quad R. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x+1)^n, \ (-2 < x < 0)$

17. $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ en potencias de $x + 4$

$$R. \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 3^{-n-1})(x+4)^n, \ (-6 < x < -2)$$

18. $sen^3 x$ en potencias de x $\quad R. \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(3^{2n} - 1)}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ r = +\infty$

19.- Use la serie binomial para encontrar expansiones de las siguientes funciones en potencias de x. Determine los radios de convergencia.

a. $\frac{1}{(1+x)^2}$ $\quad R. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \ r = 1$

b. $\frac{x}{\sqrt{1 - x^3}}$ $\quad$ c. $\sqrt[3]{x + 8}$

d. $x(4-x)^{3/2}$ $\quad R. 8x - 3x^2 + \frac{3}{16}x^3 + \cdots + \frac{3.1.3.5..(2n-5)x^{2n}}{2^{3(n-1)} n!}, \ r = 4$

e. $\frac{1}{\sqrt{16 + x^4}}$ $\quad R. \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x^4}{2.16} + \frac{1.3x^8}{2!\,2^2.16^2} - \frac{1.3.5x^{12}}{3!\,2^3 16^3} + \cdots\right), \ r = 2$

f. $\ln(\sqrt{1 + x^2} - x)$

20.- Aproxime cada una de las siguientes integrales definidas con 4 cifras decimales.

a. $\int_0^{1/2} sen\,(x^2)dx$ $\quad R. 0{,}0415$ $\quad$ b. $\int_0^{0,1} \ln(1 + sen\,x)dx$ $\quad R. 0{,}0048$

c. $\int_0^1 g(x)dx$, donde $g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$ $\quad R. 0{,}2397$

d. $\int_0^{1/4} \sqrt{x} sen\, x\, dx$ $\quad R. 0{,}0124$ $\quad$ e. $\int_0^1 sen\, x^3\, dx$ $\quad R. 0{,}23385$